हिन्दुस्तानी मापविद्या

हिन्दी मेन्सुरेशन

बाबू रामनाथ चट्टोपाध्याय, एम. ए.
की बनाई हुई

SECOND EDITION

इण्डियन प्रेस, प्रयाग, से छपकर प्रकाशित

१९०१ ई०

[क़ीमत ॥)

हिन्दुस्तानी मापविद्या

वा

हिन्दी मेन्सुरेशन

बाबू रामनाथ चट्टोपाध्याय, एम. ए.,
की बनाई हुई

SECOND EDITION.

इण्डियन प्रेस प्रयाग से छपकर प्रकाशित

१९०१ ई०

 [क़ीमत ॥)

PRINTED AT THE INDIAN PRESS,
ALLAHABAD.

हिन्दुस्तानी मापविद्या

परिभाषा

१--गणित विद्या--उस विद्या को कहते हैं जिसमें परि-
ाणों का अर्थात् उन वस्तुओं का जिनका माप हो सकता है
र्णन हो ॥

२--मापन--गणित स्कंध का वह भाग है जिसमें उन नियमों की खोज की जाती है जिनके द्वारा वस्तुओं की लंबाई, क्षेत्रफल, विस्तार और दूसरे परिसारों को साधारण जाने हुए विशालता के माप से निकाल सकते हैं या अनुमान कर सकते हैं ॥

मापविद्या--व्यावहारिक रेखा गणित की एक शाखा है जिन-
में रेखाओं की लंबाई या सतहों के क्षेत्रफल या गंधर्बों के विस्तार दिए हुए रेखाओं और कोनों के द्वारा मालूम कर सकते हैं इस-लिये हम उसको व्यतिरेक माप कहते हैं। जैसे यदि म्योरसेन्ट्रल कालिज के विजयनगरम बुर्ज की उंचाई दर्याफ्त करना हो तो हम उस के सिरे पर जाकर किसी रस्सी में पत्थर बांध कर उस की जड़ तक लटकावें तो रस्सी की लंबाई नापने से बुर्ज की उंचाई मालूम हो सकती है परंतु इसको मापन नहीं कहते यद्यपि यह माप है लेकिन अगर हम बुर्ज की परछाहीं की लंबाई मान लो कि नौ बजे सबेरे नाप लेवैं और उसी समय अपनी छड़ी की परछाहीं की लंबाई भी नाप लेवैं और रेखागणित का यह प्रामीय धारण करके कि बुर्ज की उंचाई हमारी छड़ी की लंबाई के साथ वही निस्बत या संबंध रखती है जो बुर्ज की परछाहीं

हमारी छड़ी की परछाहीं के साथ रखती है बुर्ज की उंचाई दर्याफ़्त करें ते इस को मापन कहते हैं सेवाय इसके बहुत सी दशाओं में सीधी रीति से माप असंभव होती है तो उन दशाओं में मापविद्या के ज़रिये से माप अवश्य होती है। दृष्टांत यह है कि एवरेष्ट पहाड़ की उंचाई किस तरह दर्याफ़्त हो सकती है और बड़े मुल्क हिन्दुस्तान का क्षेत्रफल किस तरह मालूम हो सकता है इस प्रकार की माप दिए हुए साधारण विशालता को माप करके करनी चाहिए जैसे आधार रेखा की लंबाई और कुछ कोनों का परिमाण ॥

पूरी किताब मापविद्या के सीखने के लिये विद्यार्थी को त्रिकोण मापविद्या इत्यादि का जानना अवश्य है लेकिन यह प्राथमिक पुस्तक छोटे वर्ग के बालकों के वास्ते बनाई गई है इसलिये रेखागणित के चार हिस्से और थोड़ा सा बीज गणित विद्यार्थी को जानना ज़रूरी है ॥

२—लम्बाई और क्षेत्रफल के पैमाने—(एकाई परिमाण) किसी अविविक्त परिमाण (जैसे रेखा या क्षेत्रफल या कोन इत्यादि) का सख्यामाप उस संबंध को कहते हैं जो वह परिमाण अपने प्रकार के परिमाण के साथ जिसको पैमाना कहते हैं रखता है जैसे लंबाई नापने में हम गज़ या हाथ या फुट या मिटर को पैमाना मानते हैं लंबाई का अंगरेज़ी पैमाना राजसंबंधी गज़ होता है जिसकी व्याख्या इस तरह की जाती है कि वह उन रेखाओं के बीच के बिन्दुओं के दर्मियान का अंतर है जो उन सोने के डाटों पर खुदे हैं जिनमें एक पीतल का छड़ जड़ा हुआ है और वह राजा के ख़ज़ाने के कमरे में रक्खा है और राजसंबन्धी परिमाणिक गज़ के नाम से प्रसिद्ध है और छड़ी की गर्मी का अक्षांश गौर करने के वक्त फार्नहाइट अनुमान से ६२° रहता है ॥

थोड़े दिन हुए कि हिन्दुस्तान की अंगरेज़ी अमलदारी में लंबाई या क्षेत्रफल के माप का पैमाना प्रचलित नहीं था—थ्यूलियर साहब लिखते हैं कि कहीं २ दफ़्तरों में माप का पैमाना कहावत पर आधीन है और जब अवसर अभ्यास का आन पड़ता है तो कचहरी के नाज़िर को हुकुम होता है कि हाथ या लग्गी की लंबाई सही बतावें और वह बहुत आसानी से अपना हाथ फैला कर केहुनी से छोटी अंगुली के सिरे तक नाप करके जल्दी बता देते हैं और कदाचित वह नाटे हुए तो दो या चार अंगुलियों की चौड़ाई उसमें जोड़ देते हैं वो बिहार में प्रायः ज़मीदार और काश्तकार में इसका झगड़ा होता था कि किस मनुष्य के हाथ को पैमाना का हाथ मान लेना चाहिए इसलिए यह निपट उचित है कि कुल माप एकड़ से की जावै इसके निमित्त कुछ काररवाई आरंभ हो चली है एकट दो सन् १८८९ ई० (एकट लंबाई की नाप) के अनुसार यह हुकुम हुआ है कि राजसंबंधी पैमाना गज़ जो अँगरेज़ी राज्य में प्रचलित है वही हिन्दुस्तान की अँगरेज़ी राज्य में लंबाई का प्रचलित पैमाना समझा जायगा तीसरा भाग इस गज़ का फुट कहलावेगा छत्तीसवां भाग इस गज़ का इञ्च कहलावेगा ॥

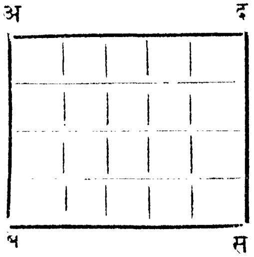
क्षेत्रफल का पैमाना—लंबाई के पैमाना से बनता है यहां तक कि हम इसकी साधारण व्याख्या इस तरह से करते हैं कि लंबाई के पैमाने पर अगर वर्ग बनावें तो वह क्षेत्रफल का पैमाना होता है। उदाहरण यह है कि अगर लंबाई का पैमाना फुट ग्रहण किया जावै तो वह वर्ग जिसकी एक भुजा १ फुट है क्षेत्रफल का पैमाना होगा कोन का पैमाना इस पुस्तक में जो इस्तेमाल किया है वह अंगरेज़ी अक्षांश (दर्जा) है जो ९० वां भाग एक समकोन का है ॥

४—अविविक्त परिमाणों को चिन्ह से ज़ाहिर करना—जो ऊपर लिखा गया है उससे ज़ाहिर है कि पूरे तरह से किसी

अविविक्त प्रमाण को ज़ाहिर करने के लिये गुणन के दो खंड होते हैं इसमें एक खंड पैमाना है जो विचार किए हुए परिमाण के प्रकार है और दूसरा खंड वह संख्या है जो यह ज़ाहिर करती है कि उस प्रमान में वह पैमाना कैबार शामिल है इसलिये अगर एक फुट की लंबाई का पैमाना मान लेवैं तो रेखा की लंबाई जिसमें अ मरतबा वह पैमाना शामिल है वह अ मरतबा १ फुट अर्थात् अ फ़ीट होगी इस रेखा को केवल चिन्ह अ से ज़ाहिर करते हैं वो गुणन खंड १ फुट लुप्त रहता है इसी तरह से उस खेत का क्षेत्रफल जिसमें क्षेत्रफल के अ पैमाने शामिल हैं वह अ × १ वर्ग फ़ीट अर्थात् अ वर्ग फ़ीट है वो क्षेत्रफल को चिन्ह अ से ज़ाहिर करते हैं ॥

५—आयत का क्षेत्रफल—कल्पना करो कि अ ब स द एक आयत है जिसकी एक भुज अ ब में अ × पैमाने वो दूसरे भुज ब स में ब × पैमाने के अंतर गत हैं अ ब को अ बराबर भागों में बांटो तो प्रत्येक भाग लंबाई के पैमाना के बराबर होगा और ब ब को ब बराबर भागों में करने से प्रत्येक भाग लंबाई के पैमाने के बराबर होगा इन भाग बिन्दुओं से आयत के भुजों के समानान्तर सरल रेखा खींचो

शकल १



तो इन रेखाओं से आयत कई वर्ग क्षेत्रों में विभाग हो जाता है जिसमें हर एक क्षेत्रफल के पैमाना के बराबर होता है (देखो युक्ती ३) चूंकि अ पांती इन वर्ग क्षेत्रों के हैं और हर पांती में ब वर्गक्षेत्र हैं तो आयत अ ब स द में कुल समूह इन वर्गक्षेत्रों का याने क्षेत्र फल के पैमानों की ब वार अ अर्थात् अ × ब होगी ॥

निर्णय—शकल १ में अ ब चार बराबर हिस्सों में और द स पांच बराबर हिस्सों में तक़सीम किए गए हैं इसलिये क्षेत्रफल बराबर है क्षेत्रफल के २० पैमानों के या केवल २० के ॥

जब हम यह कहते हैं कि आयत का क्षेत्रफल उसके दो आसन्न भुजों का गुणनफल होता है तो उसका अर्थ ऊपर लिखे हुए विचार के अनुसार समझना चाहिए और वे भुजाएं प्रत्येक संख्याओं से ज़ाहिर की जाती हैं जिनसे यह मालूम होता है कि लंबाई के उतने पैमाने प्रत्येक भुज में अंतरगत हैं और यह याद रखना चाहिए कि गुणनफल की संख्या में लंबाई का पैमाना नहीं है किन्तु पैमाना वर्ग या पैमाना क्षेत्रफल है ॥

विद्यार्थी को यह कभी नहीं समझना चाहिए कि अंकगणित से किसी अविविक्त संख्या को दूसरे अविविक्त संख्या से गुणा करना संभव है—विषयापकृष्ट संख्याओं को आपस में गुणा कर सकते हैं जैसे ५ का चौगुना २० होता है या किसी अविविक्त संख्या को किसी विषयापकृष्ट संख्या से गुणा कर सकते हैं जैसे ४ फ़ीट का पांचगुना २० फ़ीट होता है लेकिन हम किसी अविविक्त संख्या या विषयापकृष्ट संख्या को किसी अविविक्त संख्या से गुणा नहीं कर सकते जैसे ५ का ४ फ़ीट गुणा या ५ फ़ीट का ४ फ़ीट गुणा हम नहीं कह सकते और भाग के निमित्त प्रगट हो कि एक अविविक्त संख्या को दूसरी अविविक्त संख्या से जो उसी प्रकार की हो भाग कर सकते हैं जैसे २० फ़ीट में ४ फ़ीठ ५ वार शामिल है लेकिन एक विषयापकृष्ट संख्या को किसी अविविक्त संख्या से भाग नहीं कर सकते ॥

जब हम यह कहते हैं कि किसी आयत का क्षेत्रफल उसके दो आसन्न भुजों का गुणनफल होता है तो हमारा मतलब यह नहीं है कि यह गुणा अंकगणित का है बल्कि शब्द गुणा के अभिप्राय को फैला देते हैं अर्थात् एक अविविक्त प्रमाण को दूसरे

अविविक्त प्रमाण से गुणा करना उस दशा में कहते हैं जब कि इन परिमाणों की माप संख्या को अंकगणित के अनुसार गुणा करने से किसी और अविविक्त संख्या की माप संख्या लाभ हो—और इस अंत के अविविक्त संख्या की निर्णय पहिले प्रमाणों की अपेक्षा से किया जाता है जैसे घन फुट का निर्णय वर्ग फुट और रेखा रूप फुट के अपेक्षा से किया जाता है ॥

रेखारूप माप

१२ इञ्च	=	१ फुट
३ फ़ीट	=	१ गज़
५½ गज़	=	१ रोड या पोल
४० पोल या २२० गज़	=	१ फ़रलांग
८ फरलांग या १७६० गज़ या ५२८० फ़ीट	=	१ मील
१ हाथ	=	१८ इञ्च या १½ फ़ीट
१ परग	=	६ फ़ीट
१ केबुल की लंबाई	=	१२० परग
१ लीग (१½ कोस)	=	३ मील
१ गिरह (नौका संबंधी) या १ मील (भूगोल का)	=	६०८० फ़ीट
१ अंश (विषुव रेखान्तर)	=	६० गिरह या ६९$\frac{1}{12}$ मील
१ कड़ी	=	७.९२ इञ्च
१ जरीब	=	१०० कड़ी
	=	७९२ इञ्च
	=	६६ फ़ीट
	=	२२ गज़

वर्ग या धरातल माप

१४४ वर्ग इञ्च	=	१ वर्ग फुट
९ वर्ग फीट	=	१ वर्ग गज़
३०¼ वर्ग गज़	=	१ वर्ग रोड या वर्ग पोल
४० पोल	=	१ रोड
४ रोड	=	१ एकड़
६४० एकड़	=	१ वर्ग मील
और १ एकड़	=	१० वर्ग जरीब
	=	४८४० वर्ग गज़
	=	एक लाख वर्ग कड़ी

पहिला भाग

[इस विभाग में मापविद्या के उन्हीं नियमों का वर्णन है जो कि रेखागणित के पहिले दो खण्डों से साधे जा सकते हैं]

पहिला प्रकरण

आयत

६--आयत के यदि भुज दिए हों तो उसके क्षेत्रफल निकालने की रीति--

यह युक्ति ५ में सिद्ध की गई है कि आयत अ ब स द के दो आसन्न भुजों की लंबाई का माप क्रम से यदि अ और व हो तो क्षेत्रफल का माप अ और व के गुणनफल के बराबर होता है ॥

इसलिये क्षेत्रफल अब सद = अ व क्षेत्रफल के पैमाने = अ ब ॥

नियम १—आयत का क्षेत्रफल = उस के भुजों की लंबाई के गुणनफल ॥

उदाहरण १—मान लो कि अ = ४९ फ़ीट ६ इंच और व = २५ फ़ीट तो आयत का क्षेत्रफल = ४९.५ × २५ = १२३७.५ वर्ग फ़ीट ॥

उदाहरण २—एक आयताकार कमरे की लंबाई २५ फ़ीट ३ इञ्च और चौड़ाई १३ फ़ीट ६ इञ्च है तो उसके गच में वर्ग फ़ीट की संख्या क्या होगी ॥

२५.२५ × १३.५ = ३४०.८७५ वर्ग फ़ीट ॥

उदाहरण ३—एक खेत की लंबाई ५० जरीब ६२ कड़ी और चौड़ाई २३ जरीब १४ कड़ी है तो बताओ कि उसका लगान फ़ी एकड़ २५ रु० के हिसाब से कितना होगा ॥

५०. ६२ × २३.१४ = ११७१. ३४६८ जरीब =

= ११७.१३४६८ एकड़

लगान = २५ रु० × ११७.१३४६८ = २९२८.३६७

= २९२८ रु० ५ आ० १०.४६४ पाई

नियम २—आयत के क्षेत्रफल को उसकी लंबाई से भाग देने पर लब्धि चौड़ाई होती है और क्षेत्रफल में चौड़ाई से भाग देने पर लब्धि लंबाई होती है—

उदाहरण १—एक आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल २० एकड़ ५ वर्ग जरीब और ४२½ वर्ग कड़ी और एक भुज ८२५ कड़ी है तो दूसरी भुज निकालो ॥

२० एकड़ ५ जरीब ४२½ कड़ी = २०.५४२५ एकड़ = २०५४२५० बर्गकड़ी ॥

फिर $\frac{२०५४२५०}{८२५}$ = २४९० कड़ी = २४ जरीब ९० कड़ी

७—बर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल—बर्गक्षेत्र वह आयत है जिसकी भुजाएं आपस में बराबर होती हैं इसलिये अगर उसकी एक भुज की लंबाई दी हुई हो तो क्षेत्रफल शीघ्र निकल सकता है जैसे कि यदि उसके एक भुज की लंबाई अ है तो क्षेत्रफल = अ × अ = अ^२ ॥

नियम ३—बर्ग का क्षेत्रफल = एक भुज पर के बर्ग के

उदाहरण १—एक कमरा १५ फ़ोट बर्ग है तो उसका क्षेत्रफल कितने बर्ग गज़ होगा ॥

क्षेत्रफल = १५ × १५ बर्ग फ़ीट = २२५ बर्ग फ़ीट = २५ बर्गगज़

उदाहरण २—एक खेत की लंबाई चौड़ाई से दूनी है और लगान फ़ी एकड़ २ रु० ८ आना के हिसाब से २४ रु० ८ आना है तो खेत का विस्तार बताओ ॥

क्षेत्रफल $= \frac{२४\frac{१}{२}}{२\frac{१}{२}}$ एकड़ $= \frac{४९}{५}$ एकड़ $=$ ९.८ एकड़ ॥

कल्पना करो कि चौड़ाई अ गज़ है तो लंबाई $=$ २ अ गज़ और अ $\times$ २ अ वर्ग गज़ $=$ ९.८ एकड़ $=$ ९.८ $\times$ ४८४० वर्गगज़ ॥

$\therefore$ २ $अ^२$ $=$ ९.८ $\times$ ४८४० या $अ^२$ $=$ ४९ $\times$ ४८४ अथवा अ $=$ ७ $\times$ २२

$\because$ चौड़ाई <u>१५४ गज़</u> है और लंबाई <u>३०८ गज़</u>

पहिला अभ्यास

१—उस आयत का क्षेत्रफल बताओ जो ६५ गज़ लंबा और २५ गज़ चौड़ा है ॥

२—एक मेज़ आयताकार है जिसकी लंबाई १२ फ़ीट ६ इंच और चौड़ाई ५ फ़ीट ३ इञ्च है तो बताओ कि उसका क्षेत्रफल कै वर्गफ़ीट और इञ्च है ॥

३—एक वर्ग का एक भुज ३६ इञ्च है उसका क्षेत्रफल वर्ग फ़ीट में बताओ ॥

४—मिस्र के बड़े सूच्याग्रसंस्तम्भ का आधार (नींव) वर्गाकार है जिसका एक भुज ७६४ फ़ीट है तो बताओ कि कितने एकड़, रोड और पोल उससे घिरे हुए हैं ॥

५—एक वर्ग का भुज १० जरीब ४८ कड़ी है तो उसका क्षेत्रफल निकालो ॥

६—एक आयत की लंबाई ३४ जरीब ५६ कड़ी और चौड़ाई २२ जरीब ६४ कड़ी है तो क्षेत्रफल क्या होगा ॥

७—एक आयताकार मैदान की चौड़ाई ३२ जरीब ४५ कड़ी और लंबाई ४५ जरीब २८ कड़ी है तो उसका क्षेत्रफल एकड़ और एकड़ के दशमलव में बताओ ॥

८—एक बाग़ एक वर्ग के समान १० एकड़ में है तो उसकी लंबाई निकालो ॥

९—एक आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल १९ एकड़ है और उसकी लम्बाई १४९६ गज़ है तो उसकी चौड़ाई क्या है ॥

१०—तीन वर्गों के भुज क्रम से ११२, ३८४ और ९६० गज़ हैं इन तीनों वर्गों के बराबर जो वर्ग हो उसका भुज निकालो ॥

११—एक कोठरी १७ फ़ीट वर्ग है तो उसके फ़र्श में कितने वर्ग इञ्च हैं ॥

१२—५ फ़ीट वर्ग और ५ वर्गफ़ीट में क्या अंतर है ॥

१३—उस फ़र्श की क्या लंबाई है जिसकी चौड़ाई २४ फ़ीट और क्षेत्रफल उस फ़र्श के बराबर है जिसका क्षेत्रफल ३६ फ़ीट वर्ग है ॥

१४—एक मेज़ १२$\frac{१}{२}$ इंच चौड़ी ६$\frac{१}{४}$ वर्ग फ़ीट अंतरगत करती है उसकी लंबाई क्या है ॥

१५—एक वर्गाकार मेज़ का क्षेत्रफल क्या है जिसकी भुज ५ फ़ीट ६ इंच है ॥

१६—एक शतरंज की बिसात एक फ़ुट वर्ग है तो उसके प्रत्येक ख़ाने का क्या क्षेत्रफल होगा ॥

१७—एक वर्ग का भुज १६ गज़ है और एक आयत ३५ फ़ीट लंबा और ३३ फ़ीट चौड़ा है तो इनके क्षेत्रफलों में अंतर बताओ ॥

१८—एक तख़्ता ५$\frac{१}{३}$ इंच चौड़ा है उसकी कितनी लंबाई ली जाय कि क्षेत्रफल १ वर्ग फ़ुट हो ॥

१९—एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल (रक़बा) ७ एकड़ ३ रोड १० पोल है यदि एक भुज दूसरे भुज का दूना हो तो उसके भुजों को बताओ ॥

२०—कागज़का एक तख़्ता ४० इंच लंबा और २७$\frac{१}{२}$ इंच चौड़ा है तो बताओ कि उसका एक रीम (२० दस्ता) कितने वर्ग गज़ ढक लेगा ॥

२१—एक घास का मैदान २१६ फ़ीट लंबा और १९६ फ़ीट चौड़ा है और उसमें फूलों की १० बर्ग क्यारियां हैं जिनका प्रत्येक भुज ९ फ़ीट है तो बताओ कितने बर्गगज़ घास है॥

२२—एक आयताकार धर्ती में से जो ३८५ गज़ चौड़ी है कितनी लंबाई काटली जाय कि काटे हुए हिस्से का क्षेत्रफल ७ एकड़ हो॥

२३—एक खेत दस लाख बर्गों में बिभाजित हो सकता है यदि प्रत्येक बर्ग का भुज एक हाथ हो तो संपूर्ण खेत का क्षेत्रफल निकालो॥

२४—एक रेल का यनजिन हौड़ा से दिल्ली तक जाने में जो कि ९५४ मील के अंतर में है कितनी एकड़ ज़मीन पर से जायगा जब कि दो पटरियों में अंतर ५ फ़ीट ६ इञ्च का है॥

२५—म्योरसेन्ट्रल कालेज का सेनेट हाल (कमरा) ८२ फ़ीट लंबा और ३६ फ़ीट चौड़ा है तो बतओ कि उस हाल में कै परीक्षा देने वालों की परीक्षा हो सकती है अगर प्रत्येक मेज़ और त्रिपाई को २० बर्ग फ़ीट दिया जावे॥

व्योहारिक रीति

८—जब कि आयताकार क्षेत्र का विस्तार कड़ियों में दिया हो तो उसका क्षेत्रफल वर्ग कड़ियों में निकलता है यदि उस संख्या को १ लाख से भाग दे अथवा उस संख्या के अंत के ५ अंकों को काट दे तो अवशिष्ट संख्या जो कि वाम भाग में रह जायगी वह क्षेत्रफल की संख्या एकड़ में होगी और शेष दशमलव भिन्न एकड़ होगी अंतिम संख्या को अगर ४ से गुणा करें तो संख्या अभिन्न रोड होगी और दशमलव वाले भाग को ४० से गुणा करें तो गुणनफल पोल होगा—

उदाहरण १—फ़र्ज़ करो कि एक आयत की भुजाएं ३४७ जरीब और ४२ जरीब ५० कड़ी हैं तो क्षेत्रफल क्या होगा॥

३४७ जरीब = ३४७०० कड़ी

४२ जरीब ५० कड़ी = ४२५० कड़ी

३४७०० × ४२५० = १४७४७५००० वर्ग कड़ी

= १४७४. ७५ एकड़

= १४७४ एकड़ ३ रोड

उदाहरण २—मानलो कि एक आयत के भुज ८ जरीब ४८ कड़ी वो ३ जरीब ६५ कड़ी हैं तो क्षेत्रफल निकालो ॥

८४८ × ३६५ = ३०९५२० वर्ग कड़ी

दहिने तरफ़ से ५ अंकों को काट देने से

३·०९५२ एकड़ प्राप्त होता है

४

०. ३८०८ रोड

४०

१५. २३२० पोल (पर्च)

इसलिये क्षेत्रफल = ३ एकड़ ० रोड १५ पोल

८—द्वादशमलव या चलीपागुणन—एक रीति है जिसको मकान बनाने वाले और बढ़ई और दूसरे कारीगर अपने काम के समझने में प्रयोग करते हैं नीचे के सूचीपत्र से जिसमें रेखाकार और धरातल फुट द्वादशांश की रीति से प्रतिभाग किए गए हैं चलीपागुणन का कर्म समझा जा सकता है ॥

१ फुट (रेखाकार या धरातल)	= १२ प्रथम
१ प्रथम (१′)	= १२ द्वितीय
१ द्वितीय (१″)	= १२ त्रितीय
१ त्रितीय (१‴)	= १२ चतुर्थ

और इसी तरह से

उदाहरण १—११ फ़ीट ५¼ इञ्च को द्वादशमलव के रीति से लिखो ॥

११ फ़ीट ५¼ इञ्च = ११ फ़ीट ५′ ३″

उदाहरण २—४५ वर्ग फ़ीट ४१ बर्ग इञ्च को द्वादशमलव के रीति में लाओ ॥

४५ वर्ग फ़ीट ४१ बर्ग इंच = $४५\frac{४१}{१४४}$ वर्ग फ़ीट

$= (४५ + \frac{३६}{१४४} + \frac{५}{१४४})$ बर्ग फ़ीट

$= (४५ + \frac{३}{१२} + \frac{५}{१४४})$ बर्ग फ़ीट

= ४५ बर्ग फ़ीट ३′ ५″

उदाहरण ३—५२५ बर्गफ़ीट ५′ ७″ ६‴ को बर्गगज़ इत्यादि में लाओ

५२५ बर्गफ़ीट ५′ ७″ ६‴ = $(५२५ + \frac{५}{१२} + \frac{७}{१४४} + \frac{६}{१२}$ का $\frac{१}{१४४})$ बर्गफ़ीट

= ५८ बर्गगज़ ३ बर्गफ़ीट ६७½ बर्गइञ्च

दूसरा अभ्यास

द्वादशमलव के रूप में लाओः—

(१) ४ फ़ुट ७½ इञ्च (२) ७ फ़ीट २¾ इञ्च (३) ५ वर्ग फ़ीट १३१½ वर्ग इञ्च (४) ९ बर्ग फ़ीट ३६¼ बर्ग इञ्च (५) १२ बर्ग गज़ ३ बर्ग फ़ीट (६) ९३ बर्ग फ़ीट १३२⅓ बर्ग इञ्च (७) ३ बर्ग गज़ ५ बर्ग फ़ीट ११३½ बर्ग इञ्च

फ़ीट और इञ्च के रूप में लाओः—

(८) ७ फ़ीट ८′ ३″ (९) ५ बर्ग फ़ीट ४′ ५″ ६‴ (१०) ३०० बर्ग फ़ीट ५′ ६″ ७‴

१०—द्वादशमलव का गुणन

नियम

(रेखाकार) फ़ीट × (रेखाकार) फ़ीट = (धरातल) फ़ीट
(रेखाकार) प्रथम × (रेखाकार) फ़ीट = (धरातल) प्रथम
(रेखाकार) फ़ीट × (रेखाकार) प्रथम = (धरातल) प्रथम
(रेखाकार) प्रथम × (रेखाकार) प्रथम = (धरातल) द्वितीय

(रेखाकार) द्वितीय × (रेखाकार) प्रथम = (धरातल) त्रितीय
(रेखाकार) प्रथम × (रेखाकार) द्वितीय = (धरातल) त्रितीय
(रेखाकार) द्वितीय × (रेखाकार) द्वितीय = (धरातल) चतुर्थ
इत्यादि इत्यादि इत्यादि

उदाहरण १—५ फ़ीट ७ इञ्च को ६ फ़ीट ८ इञ्चसे गुणा करो ॥

हम पहिले ६ फ़ीट को ५ फ़ीट से गुणा करते हैं यह ध्यान में रखकर कि १२″ = १′ वो १२″ = १ वर्गफ़ुट और ६ फ़ुट × ७′ = ४२′ = ३ वर्ग फ़ीट ६′—तब हम ८′ से गुणा करते हैं यह याद रख कर के कि १′ × १′ = १″ (धरातल) और ८′ × ७′ = ५६″ = ४′ ८″ और ५ फ़ीट × ८′ = ४०′ = ३ फ़ीट ४′

फ़ीट
५—७′
६—८′
३३—६
३—८—८
३७—२′—८′

या ३७ वर्गफ़ीट ३२ वर्गइञ्च

तीसरा अभ्यास

नीचे दिए हुए भुजों के आयतों का क्षेत्रफल द्वादशांश की रीति से निकालो।

(१) ३ फ़ीट ६ इञ्च और २ फ़ुट ३ इञ्च (२) ४ फ़ीट ५ इञ्च और ३ फ़ीट ७ इञ्च (३) ५ फ़ीट ३′ ४″ और ९ फ़ीट २′ १″ (४) ६ फ़ीट ७′ १०″ और ३ गज़ २ फ़ीट (५) २० फ़ीट ४′ ८″ और ७ फ़ीट ६′ ४″

११—कमरों में दरी बिछाना।—एक आयताकार कमरे में यदि दरी बिछाई जावै तो दरी का क्षेत्रफल कमरे के गच्च के अवश्य तुल्य होगा इसलिये दरी की लंबाई मालूम करने के लिये हम कमरे की लंबाई और चौड़ाई को आपस में गुणा करते हैं और गुणनफल को दरी की चौड़ाई से भाग से देते हैं गुणने और भाग देने के पहिले कमरे की लंबाई और चौड़ाई और दरी की चौड़ाई

को एक राशि अवश्य कर लेनी चाहिए याने सब को गज़ या फ़ीट या इञ्च कर लेना चाहिए ॥

नियम—$\text{दरी की लंबाई} = \dfrac{\text{कमरे की लंबाई} \times \text{कमरे की चौड़ाई}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$

उदाहरण—एक कमरे की लंबाई १२ फ़ीट ६ इञ्च और चौड़ाई ७ फ़ीट और ६ इञ्च है यदि उसमें ३० इञ्च चौड़ी दरी बिछाई जावे तो उसकी लंबाई क्या होगी ॥

$\text{दरी की लंबाई} = \dfrac{१२\frac{१}{२} \times ७\frac{१}{२}}{२\frac{१}{२}} = ३७\frac{१}{२}$ फीट

१२—किसी कमरे के दिवालों को कागज़ से मढ़ना—

किसी आयताकार कमरे के दिवालों का क्षेत्रफल निकालने के लिये हम चारों दिवालों को फैली हुई समझते हैं याने यह समझते हैं कि चारों दिवालें पास पास खड़ी हैं तो यह मालूम होता है कि चारों दिवालें मिलकर एक आयत बन जाता है और इस आयत की लम्बाई; दूने (कमरे की लम्बाई + कमरे की चौड़ाई) और चौड़ाई = कमरे की उंचाई ॥

नीचे लिखे हुए चक्र से ऊपर की युक्ति प्रकाशित होती है

उंचाई	पहिली दिवाल	दूसरी दिवाल	तीसरी दिवाल	चौथी दिवाल	उंचाई
	लम्बाई	चौड़ाई	लम्बाई	चौड़ाई	

नियम १—दिवालों का क्षेत्रफल = २ × (लम्बाई + चौड़ाई) × उंचाई = गच्च के परिमित × कमरे की उंचाई ॥

परिभाषा—परिमिति = सीमा के रेखाओं के लम्बाई के ॥

टिप्पणी—कागज़ मढ़ने के लिये दिवालों का क्षेत्रफल निकालने में द्वार और खिड़कियों अंगेठियों इत्यादि का क्षेत्रफल घटा देना चाहिए ॥

नियम—२ कागज़ की लंबाई $= \frac{\text{दिवालों का क्षेत्रफल}}{\text{कागज़ की चौड़ाई}}$

उदाहरण १—एक कमरे की दिवालों का क्षेत्रफल निकालो जिसकी लम्बाई १६ फ़ीट ६ इंच और चौड़ाई १२ फ़ीट ६ इंच और उंचाई १४ फ़ीट है ॥

परिमिति $= २ \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)
$= २ (१६\frac{१}{२} + १२\frac{१}{२})$
$=$ ५८ फ़ीट
उंचाई $=$ १४ फ़ीट
दिवाल का क्षेत्रफल $=$ ५८ $\times$ १४ फ़ीट
$=$ ८१२ वर्ग फ़ीट

उदाहरण २—पहिले उदाहरण में यदि कमरे में दो दरवाज़े हैं जिनकी लम्बाई ७ फ़ीट और चौड़ाई ४ फ़ीट है और दो खिड़कियां हैं जिनकी लम्बाई ६ फ़ीट और चौड़ाई ३ फ़ीट है यदि कागज़ की चौड़ाई २ फ़ीट ६ इञ्च हो तो कितने गज़ कागज़ की आवश्यकता होगी ॥

द्वारों का क्षेत्रफल $=$ २ $\times$ ७ $\times$ ४ $=$ ५६ वर्ग फ़ीट ॥
खिड़किओं का क्षेत्रफल $=$ २ $\times$ ६ $\times$ ३ $=$ ३६ वर्ग फ़ीट ॥

आवश्यक कागज़ का क्षेत्रफल $=$ ८१२ — (५६ + ३६) $=$ ७२० वर्ग फ़ीट ॥

कागज़ की लंबाई $= \frac{७२०}{२\frac{१}{२}} =$ २८८ फ़ीट $=$ ९६ गज़

१३—किसी क्षेत्रफल में पत्थर की पटियां बिछाना सब पटियों का क्षेत्रफल निश्चय बराबर होगा जिसमें वे बिछती हैं यदि पटिया बराबर विस्तार की हों तो ॥

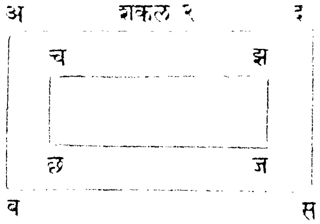
$$\text{संख्या पटिओं की} = \frac{\text{क्षेत्रफल जिस में पटियां बिछी हैं}}{\text{प्रत्येक पटियों का क्षेत्रफल}}$$

उदाहरण—कितनी पत्थर की पटियां ३ फ़ीट लम्बी और २ फ़ुट ६ इंच चौड़ी एक चौक में बिछेंगी जिसकी लंबाई ७५ गज़ और चौड़ाई ४० गज़ १ फ़ुट है ॥

$$\text{पटिओं की संख्या} = \frac{२२५ \times १२१}{३ \times २\frac{१}{२}} = \underline{३६३०}$$

१४—क्षेत्रफल समान रास्ते का जो एक आयताकार चौक के चारों तरफ उसके ठीक सीमा के भीतर बना है:—

मान लो कि अ ब स द एक आयताकार चौक है जोकि क फ़ुट लंबा ख फ़ुट चौड़ा है मान लो कि समान मार्ग ग फ़ुट चौड़ा चारों ओर उसके भीतर बना है वह मार्ग एक छोटा आयत च छ ज झ घेरता है जिसकी लंबाई



(क—२ ग) फ़ीट और चौड़ाई (ख—२ ग) फ़ीट है ॥

इसलिये मार्ग का क्षेत्रफल = क्षेत्रफल = अ ब स द—क्षेत्रफल च छ ज झ

$$= \text{क ख} — (\text{क} — २\ \text{ग})(\text{ख} — २\ \text{ग})$$

$$= \text{ग}\ (२\ \text{क} + २\ \text{ख}) — ४\ \text{ग}^२$$

$$\text{या} = \underline{२\ \text{ग}\ (\text{क} + \text{ख} — २\ \text{ग})}$$

टिप्पणी—इस जगह पर मान लिए हुए चौक के क्षेत्रफल में रास्ते का क्षेत्रफल मिला हुआ है ॥

क्षेत्रफल समान मार्ग का जो एक बगीचा के चारों ओर बाहरी सीमा पर बना है

शकल २ में मान लेा कि च छ ज झ एक बगीचा है और अ ब स द मार्ग की बाहरी सीमा है ॥

मान लेा कि चछ = ट, छज = ठ और मार्ग की चौड़ाई = ड तो
मार्ग का क्षेत्रफल = (ट + २ ड) (ठ + २ ड)—ट ठ
= २ ड (ट + ठ + २ ड)

उदाहरण १—एक आयताकार बाग़ २५६ गज़ लंबा और १६४ गज़ चौड़ा है यदि ३० फुट चौड़ा मार्ग बाग़ के भीतर चारों तरफ़ सीमा के पास ही भीतर बना हुआ है तेा मार्ग का क्षेत्र-फल निकालेा ॥

बाग़ का क्षेत्रफल = (२५६ × १६४) वर्ग गज़ ।

मार्ग (१० + १०) गज़ लंबाई में से और (१० + १०) गज़ चौड़ाई से काटता है ॥

इसलिये मार्ग का क्षेत्रफल = २५६ × १६४—२३६ × १४४
= ८००० वर्ग गज़

अथवा साधारण प्रकार से
क्षेत्रफल = २ ग (क + ख—२ ग)
= २ × १० (२५६ + १६४—२०)
= ८००० वर्ग गज़

उदाहरण २—एक क़िला ७४३ गज़ लम्बी और ५३१ गज़ चौड़ी आयताकार पृथ्वी पर बना है और एक ख़न्दक़ उसके चारों ओर १३ गज़ चौड़ी है तेा ख़न्दक़ का बाहरी क्षेत्रफल निकालेा ॥

ख़न्दक़ का क्षेत्रफल = (७४३ + २६) (५३१ + २६)–७४३ × ५३१
= ३३८०० वर्ग गज़

अथवा साधारण प्रकार से

क्षेत्रफल = २ ड (ट + ठ + २ ड)

= २ × १३ × (७४३ + ५३१ + २६)

= ३३८०० वर्ग गज़

चौथा अभ्यास

१–इलाहाबाद रेलवे स्टेशन का चौतरा १२७४ फुट लम्बा और २१ फीट ८ इंच चौड़ा है यदि उस पर बरद्वान के पत्थर की पटियां २५ रुपए १०० वर्ग फ़ीट के हिसाब से बिछाई जावै तो बताओ उसके बिछाने में कितना ख़र्च पड़ेगा और हर एक पटिओं की जो कि माप में २$\frac{१}{२}$ फुट × १$\frac{१}{४}$ फुट है संख्या क्या होगी ॥

यह भी बतलाओ कि माघमेला के यात्री कितने उस पर खड़े हो सकते हैं यदि हर एक यात्री को २$\frac{१}{२}$ वर्ग फुट खड़े होने के लिये जगह दी जावै ॥

२–म्योर सेन्ट्रल कालेज के पुस्तकालय में बिछाने के लिये जिसकी लम्बाई ५५ फ़ुट और चौड़ाई ३४ फ़ुट है कितने गज़ दरी की आवश्यकता होगी जिसकी कि चौड़ाई $\frac{३}{४}$ गज़ है ॥

३–एक गोल कमरे का घेरा ४५ गज़ १ फुट ३ इञ्च है और १० फुट ८ इञ्च उंचाई में है यदि उन दिवालों को १५ इञ्च चौड़े कागज़ से मढ़ें तो कितने गज़ कागज़ की आवश्यकता होगी ॥

४–एक आयताकार गेंद खेलने का मैदान २५० गज़ लम्बा और २१० गज़ चौड़ा है यदि उसके चारो तरफ कङ्कड़ की ५ फुट चौड़ी सड़क बनाई जावे तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा ॥

५–एक वर्ग खेत ६२$\frac{१}{२}$ एकड़ है तो उसके एक भुज की लम्बाई कितनी होगी ॥

६–एक आयताकार गेंद खेलने की जगह १ एकड़ है और जिसकी लम्बाई और चौड़ाई इस क्रम से हैं जैसे कि ५ : २ इस मैदान के चारो तरफ एक मार्ग है जो कि दो गज़ चौड़ा है तो

बताओ उस मार्ग में एक बर्ग गज़ में ५० ईटें के हिसाब से कितने ईटें लगेंगी ॥

७–एक कमरा ३० फुट लम्बा और १२ फुट ६ इञ्च चौड़ा और १० फुट ऊंचा है जिसमें दो दरवाज़े प्रत्येक ८ फुट ऊंचा और ३ फुट ४ इञ्च चौड़ा और दो खिड़कियां प्रत्येक ८ फुट ४ इञ्च ऊंची और ५ फुट चौड़ी हैं तो बतलाओ कि उसके दिवालों को कागज़ से मढ़ने के लिये कितने टुकड़े कागज़ लगेंगे जो कि १० गज़ लम्बा और १ गज़ चौड़ा है ॥

८–एक आयताकार बाग़ १५० गज़ लम्बा और ६४ गज़ चौड़ा ७ फुठ ६ इञ्च एक ऊंची दिवाल से घिरा हुआ है तो बतलाओ ६ आना १०० वर्गफ़ोट के हिसाब से भीतर के दिवालों में चूना पोतने में क्या ख़र्च पड़ेगा ॥

९–एक कमरा २५ फुट लम्बा और १८ फुट चौड़ा और ११ फुट ऊंचा है जिसकी दिवालों और छत पर गच्च कराने के लिये क्रम से ३ और ७ आना हर एक बर्ग गज़ के हिसाब से कितना लगेगा ॥

१०–एक गेंद खेलने के मैदान में जो १५० गज़ लंबा १४४$\frac{१}{२}$ गज़ चौड़ा है एक बर्ग भूमि भाग जिसका क्षेत्रफल कुल मैदान के क्षेत्रफल का $\frac{१}{३}$ है गेंद खेलने के लिये बनाया गया है तो इस बर्ग की भुजा बताओ और यह भी बताओ कि उस भूमि भाग की मरम्मत में एक आना प्रत्येक बर्गगज़ के हिसाब से क्या ख़र्च लगेगा ॥

११–अगर ४२ तख़्ता कागज़ हर एक ६ गज़ लम्बा एक कमरे की दीवालों के ढकने के लिये लगता है जो कि २५ फ़ीट २ इञ्च लंबा और १९ फ़ीट १० इञ्च चौड़ा और १० फ़ोट ६ इंच ऊंचा है तो कागज़ की चौड़ाई बतलाओ ॥

१२–एक आयताकार बाग़ जिसकी भुजा १ : ४ के संबंध में है ६४० एकड़ है और बाग के चारो तरफ़ भीतर एक सड़क १६ फ़ोट चौड़ी बनवाई जावै तो उसमें कितनी जगह लगैगी ॥

१३–एक आयताकार लकड़ी की संदूक ६ फ़ीट ८ इञ्च लंबी और ४ फ़ुट ६ इञ्च चौड़ी और ४ फ़ीट गहरी बनवाई जावै तो कितने वर्गफ़ीट लकड़ी के तख्ते लगेंगे ॥

१४–तीस फ़ुट लम्बा और २४ फ़ीट चौड़ा कमरा के गच्च के क्षेत्रफल और दूसरे दो कमरों के क्षेत्रफल में क्या अंतर है जब कि इन दो कमरों का विस्तार अपेक्षा पहिले कमरे के आधा है ॥

१५–आठ फ़ीट ४ इञ्च चौड़े कमरे में १८ इंच चौड़ी दरी बिछाने में ४ रु० ८ आना फ़ी गज़ के हिसाब से २२५ रु० लगते हैं तो कमरे की लम्बाई बताओ ॥

१६–एक कमरे की लम्बाई २५ फ़ीट है यदि उसकी चारों दिवालों की रँगवाई में प्रत्येक बर्ग गज दो रुपया ८ आना के हिसाब से ४०० रु० और कमरे में दरी बिछाने में हर एक बर्ग फ़ीट ५ रु० के हिसाब से २५०० रु० खर्च हों तो कमरे की उंचाई और चौड़ाई बताओ ॥

१७–एक आयताकार क्षेत्र जिस की लम्बाई चौड़ाई से डेढ़ गुना है १५ एकड़ है तो बताओ इस खेत के गिर्द चार मरतबे एक आदमी ३ मील फ़ी घंटे के चाल से कितनी देर में चलेगा ॥

१८–हिन्दुस्तान का क्षेत्रफल १४७४९१० बर्ग मील है तो इसमें कितने एकड़ और कितने बंगाल के बिगहे होंगे (१ बंगाल का बिगहा = १६०० बर्ग गज़) ॥

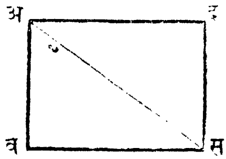
१९–एक आयताकार क्षेत्र के भुज ३९३ फ़ीट और १५० फ़ीट है तो सिद्ध करो कि अगर चारो तरफ़ किनारे से ५ गज़ चौड़ी ज़मीन काट ली जाय तो शेष क्षेत्रफल १ एकड़ होगा ॥

२०–एक कमरा के फ़र्श और दिवालों का क्षेत्रफल क्रम से ३७५ बर्ग फ़ीट और ३०० बर्ग फ़ीट और १८० बर्ग फ़ीट हैं तो कमरे का विस्तार बताओ ॥

दूसरा प्रकरण

समकोण त्रिभुज

शकल ३



१५—अ ब स द आयत का अ स कर्ण उसके दो समकोण त्रिभुज अ ब स और अ स द में बिभाग करता है जो क्षेत्रफल में बराबर है (रेखागणित १.३४) ॥

इसलिये अ ब स समकोन त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × अ ब स द आयत का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × अ ब × ब स

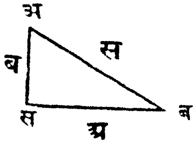
नियम—समकोन त्रिभुज का क्षेत्रफल = समकोन बनाने वाले भुजों के आधे गुणन फल ॥

उदाहरण—समकोण त्रिभुज के समकोण के गिर्द की भुजाएं क्रम से ५० गज़ और ३४ गज़ हैं तो क्षेत्रफल बताओ ॥

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ५० × ३४ = ८५० वर्गगज़

१६—पिथागोरिश का नियम—

शकल ४



मानलो कि अ ब स एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोन अ स ब समकोण है तो अ ब पर का वर्ग ब स और अ स पर के वर्गों के के योग्य बराबर है (रेखागणित १. ४७) ॥

मानलो कि अ ब स कोनों के सामने की भुजायें क्रम से अ ब स माप में हैं ॥

तो $स^2 = अ^2 + व^2$ ... ... (१)

और भी $अ^2 = स^2 - व^2$ ... ... (२)

याने $अ^2 = (स - व)(स + व)$ ... (३)

उसीतरह $व^2 = स^2 - अ^2$

$= (स + अ)(स - अ)$

इस तौर पर यदि समकोन त्रिभुज के दो भुजाएं मालूम हों तो तीसरी भुज को हम निकाल सकते हैं।

परिभाषा—शकल ४ में भुज अ ब जो समकोन के सामने है समकोन त्रिभुज का कर्ण कहलाता है और बस आधार और सअ लंब या ऊंचाई कहलाती है॥

नियम—किसी समकोन त्रिभुज में

$$क्षेत्रफल = \frac{1}{2} \times आधार \times लम्ब$$

$$समकनो\ त्रिभुज\ का\ कर्ण = \sqrt{(आधार)^2 + (लंब)^2}$$

$$आधार = \sqrt{(कर्ण)^2 - (लंब)^2}$$

$$= \sqrt{(कर्ण + लंब)(कर्ण - लंब)}$$

$$लंब = \sqrt{(कर्ण)^2 - (आधार)^2}$$

$$= \sqrt{(कर्ण + आधार)(कर्ण - आधार)}$$

टिप्पणी—ऊपर के नियम में कर्ण, आधार वा लंब के माप के वास्ते क्रम से कर्ण आधार और लंब समझे जाते हैं॥

उदाहरण १—एक समकोन त्रिभुज का आधार ६० फ़ीट है और लम्ब ११ फ़ीट है तो कर्ण बतलाओ॥

$$कर्ण = \sqrt{६०^2 + ११^2} = \sqrt{३७२१} = ६१\ फ़ीट$$

उदाहरण २—किसी समकोन त्रिभुज का कर्ण २८१ फ़ीट और आधार ७७ गज़ है तो लम्ब दरयाफ्त करो॥

टिप्पणी—दिए हुए विस्तारों को ऊपर नियमों के लगाने के पहिले एक जात कर लेना चाहिए ॥

७७ गज़ = २३१ फ़ीट

लम्ब $= \sqrt{(२८१)^2 - (२३१)^2} = \sqrt{७८९६१ - ५३३६१}$

$= \sqrt{२५६००} = १६०$ फ़ीट

दूसरी रीति

लम्ब $= \sqrt{(२८१ + २३१)(२८१ - २३१)} = \sqrt{५१२ \times ५०}$

$= \sqrt{२५६००} = १६०$ फ़ीट

टिप्पणी—दूसरी रीति क़रीब क़रीब सहल है बनिसबत पहिली के।

पांचवां अभ्यास

नीचे दिए हुए दस समकोन त्रिभुजों की तीसरी भुज निकालो

(१)	आधार =	१३३	लम्ब =	१५६
(२)	आधार =	२२५	लम्ब =	२७२
(३)	लम्ब =	६८	आधार =	११५५
(४)	कर्ण =	१२९७	आधार =	१२९५
(५)	लम्ब =	२००	कर्ण =	६४१
(६)	कर्ण =	९०५	आधार =	७७७
(७)	आधार =	११०७	लम्ब =	४७६
(८)	कर्ण =	१६०१	लम्ब =	१५९९
(९)	कर्ण =	२४६४९	आधार =	१०१९९
(१०)	आधार =	२३६६०	लम्ब =	२३६६१

१०—पिथा गोरियश त्रिभुज—ऊपर के उदाहरण में समकोण त्रिभुज के भुजाएं और कर्ण अभिन्न हैं ऐसे त्रिभुज प्रायः

पिथागोरिश त्रिभुज कहलाते हैं सब पिथागोरिश त्रिभुजों के लिखने के लिये रीति है परन्तु वे कठिन गणित पर अवलंब करते हैं नीचे लिखे हुए बीजगणित के उपाख्यान के अनुसरण करने से विद्यार्थी सहलता से पिथागोरियश त्रिभुज बना सकता है ॥

$$(१)\ (क^२ + ख^२)^२ = (क^२ — ख^२)^२ + (२ क ख)^२$$

$$(२)\ \left\{ \tfrac{१}{२}(ग^२ + १) \right\}^२ = \left\{ \tfrac{१}{२}(ग^२ — १) \right\}^२ + ग^२$$

$$(३)\ \left\{ (\tfrac{१}{२}म)^२ + १ \right\}^२ = \left\{ (\tfrac{१}{२}म)^२ — १ \right\}^२ + म^२$$

(१) में कोई दो अभिन्न संख्या क और ख के स्थान में स्थापित की जा सकती हैं जैसे कि हम क और ख के स्थान में ४ और ३ रखते हैं तो २५ वा ७ वा २४ पाते हैं जो कि समकोन त्रिभुज के भुज हैं (२) में कोई विषमसंख्या ग के स्थान में स्थापित की जा सकती है जैसे कि ग के स्थान में हम ५ रखते हैं तो हमें १३ वा १२ वा ५ मिलता है (३) में कोई सम संख्या म के स्थान में स्थापित की जा सकती है जैसे कि म के स्थान में हम ४ रखते हैं तो हमें ५ वा ३ वा ४ मिलता है ॥

१०० तक १५ पिथागोरियश त्रिभुज की नामावली कर्ण के अनुसार रक्खी गई हैं ॥

३	४	५	९	४०	४१	४८	५५	७३
५	१२	१३	२८	४५	५३	१३	८४	८५
८	१५	१७	११	६०	६१	३६	७७	८५
७	२४	२५	१६	६३	६५	३९	८०	८९
१२	३५	३७	३३	५६	६५	६५	७२	९७

व्योहारिक रीति

१८—जब कि समकोण त्रिभुज के समकोण वाली भुजों का अन्तर छोटा हो तो नीचे लिखी हुई विधि कर्ण के मालूम करने के लिये ज्यादः सहल होगी ॥

$स^2 = अ^2 + व^2 = २ अव + (अ - व)^2$

उदाहरण—अ = ११९, व = १२०, स को मालूम करो

$स^2 = २ \times ११९ \times १२० + (१२० - ११९)^2 = २८५६१$

$\therefore$ स = १६९

यदि समकोण त्रिभुज के भुज क ख ल हो तो म क, म ख, म ल, भी समकोण त्रिभुज के भुज होंगे क्योंकि अगर ॥

$क^2 + ख^2 = ल^2$

तब यह भी $म_2 क^2 + म^2 ख^2 = म^2 ल^2$

इस प्रकार से जब कि समकोण त्रिभुज के दो भुज के एकही सामान्य खंड हो तो यह खंड निकाल लिया जा सकता है और युक्ती १५ के नियमों के मुख्य संख्या में लगाने पर अंतिम फल पाने के लिये इस फल को ऊपर के सामान्य खंड से गुण देंगे ॥

उदाहरण—किसी समकोण त्रिभुज में समकोण की गिर्द की भुजाएं १४०० और ४८०० फीट क्रम से हैं तो कर्ण निकालो, २०० सामान्य खंड अलग करने पर ७ और २४ रहता है ॥

अब $७^2 + २४^2 = ६२५ = २५^2$

इसलिये कर्ण = २५ × २०० = ५००० फीट

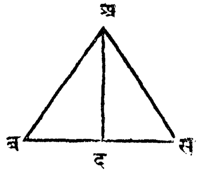
१९.—किसी समकोण समद्विवाहु त्रिभुज की भुज अ है तो कर्ण बताओ ॥

$कर्ण = \sqrt{अ^2 + अ^2} = \sqrt{२अ^2} = अ \sqrt{२}$

नियम—समकोण समद्विवाहु त्रिभुज का कर्ण भुज का $\sqrt{२}$ होता है ॥

२०—समत्रिबाहु त्रिभुज के किसी एक कोण से सामने की भुज पर खींचे हुए लंब की लंबाई मालूम करना ॥

शकल ५



फ़र्ज़ करो कि अ ब स एक समत्रिबाहु त्रिभुज है और अ द लम्ब अ से ब स पर है ॥

मानलो कि अ ब = ब स = स अ = अ; तो यह स्पष्ट है कि

ब द = द स = $\frac{1}{2}$अ; अब अ द^2 = अ ब^2 – ब द^2 = अ^2 — ($\frac{1}{2}$अ)^2 = $\frac{3}{4}$अ^2

$\therefore$ अ द = $\frac{\sqrt{3}}{2}$अ

नियम—समत्रिबाहु त्रिभुज की उंचाई = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × भुज ॥

टिप्पणी—नीचे लिखे हुए फलों को कंठ करना चाहिए ॥

$\sqrt{२}$ = १.४१४२१३६

$\sqrt{३}$ = १.७३२०५०८

२१—यदि किसी वर्ग का कर्ण दिया हो तो उसका क्षेत्रफल निकालो ॥

युक्ती १९ से कर्ण = $\sqrt{२}$ × भुज

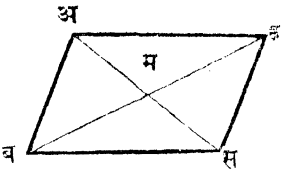
$\therefore$ भुज = $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{२}}$

इसलिये क्षेत्रफल = (भुज)^2 = $\frac{1}{2}$ (कर्ण)^2 ॥

नियम—वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × कर्ण का वर्गमूल ।

२२—विषम कोण सम चतुर्भुज—

शकल ६



मान लो कि अ ब स द एक विषम कोण समचतुर्भुज है और अ स और ब द उसके कर्ण हैं यह प्रसिद्ध बात है कि विषम कोण सम चतुर्भुज के कर्ण आपस में बराबर दो हिस्सों में काट कर समकोण बनाते हैं और चतुर्भुज के चार तुल्य त्रिभुजों में विभाग करते हैं इसलिये हमको यह मिलता है कि ॥

$$अद^२ = अम^२ + मद^२ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (१)$$

$$\text{क्षेत्रफल } अबसद = ४ \times \text{क्षेत्रफल } अमद$$
$$= ४ \times \tfrac{१}{२} अम \times मद$$
$$= \tfrac{१}{२} \times २ अम \times २ मद$$
$$= \tfrac{१}{२} \times अस \times बद \quad \ldots \quad \ldots \quad (२)$$

नियम—विषम कोण सम चतुर्भुज की भुज = उसके आधे कर्णों के वर्गों के योग्य का मूल ॥

नियम—विषमकोण सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्णों के गुणनफल के आधे ॥

२३—समकोण त्रिभुज की एक भुज और कर्ण वा दूसरे भुज का योग या अंतर दिया हो तो कर्ण और दूसरे भुज अलग अलग निकालना मानलो कि स कर्ण और अ वो व भुज हैं तब

$$स^२ = अ^२ + व^२$$

या $$अ^२ = स^२ - व^२ = (स - व)\ (स + व)$$

∴ जब अ और स + व दिया हो तो

$$स—व = \frac{अ^2}{स + व}$$

और जब अ और स—व दिया हो तो

$$स + व = \frac{अ^2}{स—व}$$

स + व और स—व के जानने पर स और व पृथक पृथक मालूम करना बहुत सहल है क्योंकि

$स = \frac{1}{2}\{(स + व) + (स—व)\}$ और $व = \frac{1}{2}\{(स + व) - (स - व)\}$

उदाहरण—अगर एक बांस ३२ हाथ लम्बा सम धरातल पर लगा हुआ हवा के झोंके से टूट कर १६ हाथ के फासिला पर उसकी टुनगी ज़मीन पर लगै तो बताओ कि जड़ से वह कै हाथ पर टूटा (लीलावती) टूटने के बाद बांस शकल ४ में स अ व की शकल का हो गया है।

तब $स + व = ३२$ $अ = १६$ $∴ स—व = \frac{१६ \times १६}{३२} = ८$

$∴ व = \frac{1}{2}$ (३२—८) = १२ हाथ

२४—कर्ण और भुजों का योग दिया हुआ है तो पृथक पृथक भुजों को निकालो ॥

अब यहां पर हम स और अ + व जानते हैं ॥

अब $२ स^2—(अ + व)^2 = २ (अ^2 + व^2)—(अ + व)^2 = (अ—व)^2$ जिससे अ—व जाना जाता है ॥

और अ + व और अ—व को जान कर अ और ब को पृथक पृथक मालूम करना सहल है जैसा कि युक्ती २३ में दिया है ॥

उदाहरण—स = १७ और अ + व = २३ तो अ और व दर्याफ्त करो ॥

$(अ - ब)^२ = २ स^२ - (अ + ब)^२ = २ × १७^२ - २३^२ = ४९$

$\therefore अ - ब = ७ \quad अ = \frac{१}{२} (२३ + ७) = १५$

$ब = \frac{१}{२} (२३ - ७) = \underline{८}$

२५—कर्ण और भुजों का अंतर दिया हुआ है तो भुजों का पृथक पृथक निकालना ॥

यहां हमको स और अ—ब मालूम है ॥

$अब \; २ स^२ - (अ - ब)^२ = २ × (अ^२ + ब^२) - (अ - ब)^२ = (अ + ब)^२$

इस प्रकार अ + ब मालूम करते हैं और अ + ब और अ—ब जान कर हम अ और ब को २४ युक्ति से मालूम करते हैं ॥

उदाहरण— स = १३ और अ—ब = ७ दिया हुआ है ॥

$यहां \; (अ + ब)^२ = २ × १३^२ - ७^२ = २८९$

$\therefore अ + ब = १७ \quad और \quad अ = \frac{१}{२} (१७ + ७) = \underline{१२}$

$ब = \frac{१}{२} (१७ - ७) = \underline{५}$

२६—रेखागणित के पहिले अध्याय के ४७ वीं शक्ल में निश्चित किए हुए समकोण त्रिभुजों के स्वाभाविक गुण के सहायता से हम लोग कभी कभी वर्ग के भुज को और उस भाग का वर्गमूल जिसका कि क्षेत्रफल एकापवर्त्य संख्या नहीं पाया जा सकता है ठीक ठीक मालूम कर सकते हैं, जैसे कि अगर वर्ग का क्षेत्रफल ५ वर्ग फ़ीट हो तो उसके भुज का मान $\sqrt{५}$ फ़ीट होगा। अब $\sqrt{५}$ के करणीगत होने से इसका मान केवल निकटस्थ लिया जा सकता है। परन्तु यदि हम दो फ़ीट एक लंबी रेखा लेवें और उसके सीमा में एक फ़ुट लंबी समकोण बनाती हुई एक सरल रेखा पहिली रेखा पर खड़ी करें तो उस रेखा पर का वर्ग जो कि इन सरल रेखाओं के दूसरी सीमाओं को बनाती है ठीक ५ वर्गफ़ीट होगा, क्योंकि $२^२ + १^२ = ५$

उदाहरण—एक वर्ग बनाओ जिसका कि क्षेत्रफल ठीक १३ वर्ग जरीब हो ॥

चूंकि १३=३^{२}+२^{२} तो चाहे हुए वर्ग की भुज बराबर होगी उस समकोण त्रिभुज के कर्ण के जिसकी भुजाएं क्रम से ३ और २ जरीब हैं ॥

परिभाषा—एकापवर्त्य राशि ऐसे होते हैं जो कि समान प्रमाण रखते हैं जैसे कि ३ ½ फ़ीट वो ६ ½ फ़ीट एकापवर्त्य हैं, क्योंकि ये दोनों २ इञ्च की लंबाई से ठीक ठीक अपवर्तित किए जा सकते हैं। जब कि राशों के समान अपवर्तन नहीं होते तो वे एकानपवर्त्य कहे जाते हैं ॥

एकानपवर्त्य राशि (असमान परिमाण) के उदाहरण

(१) वर्ग की भुज और कर्ण ॥

(२) वृत्त के व्यास और परिधि ॥

(३) रेखागणित २-११ में विभक्त रेखा के खंड ॥

छठवां अभ्यास

१—समकोण त्रिभुज के कर्ण को निकालो जिसके भुज क्रम से नीचे दिए हुए हैं—

(१) ९ इञ्च और ३ फ़ीट ४ इञ्च ॥

(२) ११ फ़ीट ८ इञ्च और १४ फ़ीट ३ इञ्च ॥

(३) ३७ फ़ीट ११ इञ्च और ४४ फ़ीट ॥

(४) ५५ फ़ीट और ८२ फ़ीट ५ इञ्च ॥

२—समकोण त्रिभुज के तीसरे भुज को निकालो जिसके कर्ण और दूसरी भुज क्रम से नीचे दिए हुए हैं—

(१)—५ फ़ीट ५ इञ्च और ४ फ़ीट ८ इञ्च (२) ४० फ़ीट १ इञ्च और ४० फ़ीट (३) ६० फ़ीट ५ इञ्च और ५३ फ़ीट ८ इञ्च (४) ८४ फ़ीट १ इञ्च और ७० फ़ीट ॥

३—किसी समकोण त्रिभुज के भुज $म^2$—$न^2$ और २म न हैं तो कर्ण निकालो ॥

४—किसी एक त्रिकोणाकार क्षेत्र के दो भुज ८८ और ११० गज़ हैं और उनके अंतर्गत एक समकोण है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

५—किसी एक समकोण त्रिभुज का कर्ण २२७५ फ़ीट और आधार लम्ब का ५/६ वां हिस्सा है; त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ॥

६—एक समत्रिबाहु त्रिभुज को परिमिति ७२० गज़ है तो उसका लम्ब निकालो ॥

७—किसी क्षेत्र के कर्ण जिसके सब भुज बराबर हैं १३१२ और १४२५ कड़ी हैं तो उसका क्षेत्रफल निकालो ॥

८—दो मनुष्य ९ बजे प्रातःकाल एकही जगह से चले। उनमें से एकने रेल से ठीक उत्तर को १ घण्टे में ३५ मील के हिसाब से और दूसरेने ठीक पूरब को डाक से १ घण्टे में १२ मील के हिसाब से सफ़र किया तो उस दिन दोपहर को वे कितनी दूरी पर होंगे ?

९—२० एकड़ वर्ग क्षेत्र में कर्ण मार्ग की लम्बाई को बताओ ॥

१०—किसी एक समकोण त्रिभुज के कर्ण और लम्ब ४१ और ४० के संबन्ध में हैं और क्षेत्रफल १८००० वर्ग गज़ है तो क्रम से आधार लम्ब और कर्ण की लम्बाई बताओ ॥

११—एक विषमकोण समचतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो जिसके कर्ण ३० और ४० जरीब हैं ॥

१२—एक वर्ग का कर्ण ६० फ़ीट है तो उसका क्षेत्रफल वर्गगज़ में निकालो ॥

१३—एक वर्ग की भुज २५० गज़ है तो कर्ण की लम्बाई क्या है ?

१४—एक मकान की चौड़ाई ६० फ़ीट है और ओरी के ऊपर के छाजन की उंचाई १६ फ़ीट है तो धरन की लम्बाई बताओ ॥

१५—$८\frac{३}{४}$ गज़ ऊंची खिड़की पर एक सीढ़ी लगाई गई है और उसका पाया दिवाल के नज़दीक ९ फ़ीट से ज़्यादा नहीं रक्खा जा सकता है, तो कम से कम सीढ़ी की लम्बाई क्या होगी ?

१६—दशमलव के तीन स्थान तक समकोण के त्रिभुज के कर्ण को जिसके भुज क्रम से नीचे दिए हुए हैं निकालो—

(१) ५ फ़ीट और ५ फ़ीट (२) ७ फ़ीट और ९ फ़ीट ( ) २७ फ़ीट ३ इञ्च और १८ फीट २ इञ्च (४) ४० फ़ीट ९ इञ्च और ३० फ़ीट ० इञ्च ॥

१७—एक रेखा ९७ फ़ीट लम्बी ७२ फ़ीट ऊंचे मकान के सिरे से दूसरे मकान के नीचे तक जो गली के दूसरी तरफ़ है पहुंचती है तो गली की चौड़ाई बताओ ॥

१८—एक सीढ़ी ३७ फ़ीट लम्बी ज़मीन से ३५ फ़ीट ऊंची खिड़की पर पहुंचती है तो मकान के आधार से पाया कितनी दूर पर है ?

१९—किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार १२० फ़ीट है और उसके प्रत्येक दोनों भुज ६१ फ़ीट हैं। आधार के सामने के शीर्ष बिन्दु से लम्ब की लम्बाई क्या होगी ?

२०—किसी विषमकोण सम चतुर्भुज के कर्ण क्रम से ७५ और ४० हाथ हैं तो उसके भुज की लम्बाई बताओ ॥

२१—एक सीढ़ी ३७ फ़ीट ऊंची दिवाल के बराबर सीधी लगी हुई थी। १२ फ़ीट दिवाल के पाये की तरफ़ से खींच ली गई तो कितने दूर पर सीढ़ी का सिरा पड़ा ॥

२२—एक सीढ़ी २५ फ़ीट लंबी एक दिवाल के बराबर लगी है तो कितनी दूर तक उसका निचला हिस्सा दिवाल से खींच लिया जावे कि उसका सिरा १ फ़ुट नीचा हो जाय ?

२३—एक सीढ़ी ५० फ़ीट लंबी किसी एक गली के एक ओर लगाए जाने पर ४० फ़ीट ऊंची खिड़की पर पहुंचती है और उस सीढ़ी के पाये को बिना हटाये उसको घुमा देने से यह दूसरी ओर ४८ फ़ीट ऊंची दूसरी खिड़की पर पहुंचती है तो गली की चौड़ाई क्या है ?

२४—किसी आयत का कर्ण ३२·५ गज़ है और उसका क्षेत्रफल २५२ वर्ग गज़ है तो उसका विस्तार क्या है ?

२५—किसी आयत का क्षेत्रफल ३३५४·१२ वर्ग फ़ीट और उसकी परिमिति २४८·६ फ़ीट है तो उसका विस्तार निकालो ॥

२६—दो जहाज़ एक ही बन्दर से चले, एक १ घंटे में १० मील के हिसाब से ठीक दक्खिन की ओर और दूसरा १ घंटे में ४$\frac{1}{2}$ मील के हिसाब से ठीक पश्चिम को गया तो २४ घंटे के अंत में कितनी दूर का अन्तर होगा ?

२७—किसी समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ३९०० वर्ग गज़ और उसका आधार ९३६ फ़ीट है तो कर्ण निकालो ॥

२८—एक आयताकार क्षेत्र की लंबाई ११८४ फ़ीट और चौड़ाई १११३ फ़ीट है तो उसके कर्णमार्ग की लंबाई क्या होगी ?

२९—किसी विषमकोण सम चतुर्भुज की परिमिति २६० फ़ीट है और उसका कर्ण ३२ फ़ीट है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

३०—एक तेली के कोल्हू का खड़ा धुरा इस तरह से गाड़ा गया है कि उसका केन्द्र दिवाल से ३$\frac{1}{2}$ हाथ की दूरी पर है। यदि उस के डंडे की लंबाई केन्द्र से ५ हाथ हो तो बताओ कि कितनी दिवाल खोद डाली जाय कि वह डण्डा सहलता से घूम सके ?

३१—एक कौए को एक स्थान अ से दूसरे स्थान व तक जाने में ६५ मील उड़ना पड़ता है। एक तीसरा स्थान स, अ स्थान से २८ मील ७ फरलांग के अन्तर पर है जो सरल रेखा अ व पर लंब है। व और स में कम से कम क्या अन्तर है ?

३२—किसी एक समकोण त्रिभुज का आधार ४ फ़ीट है और उसका क्षेत्रफल १३२० वर्ग इञ्च है तो कर्ण निकालो ॥

३३—किसी एक वर्ग का क्षेत्रफल २२·०९ वर्ग फ़ीट है। वर्ग के हर एक तरफ एक बिन्दु सबसे नज़दीक के कोण से १·२ फ़ीट दूरी पर लिया गया है कि इन बिन्दुओं को जोड़ने से जो शकल उत्पन्न हो सो वर्ग है तो इस वर्ग का क्षेत्रभल क्या होगा ?

३४—किसी समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ७१४० वर्ग फ़ीट और उसका कर्ण १६९ फ़ीट है तो भुजों को निकालो ॥

३५—किसी एक तालाब में हंस और सारसों के समूह रहते हैं। एक बीता (½ हाथ) जल के ऊपर कमल के कली का अग्र भाग देखा गया कि हवा के झोंक से यह आगे बढ़ के दो हाथ के अन्तर पर डूब गया तो पानी की गहराई बताओ। (लीलावती) [२३वीं युक्ति को लागओ]

३६—एक सर्प का विल ९ हाथ ऊंचे खम्भे के नीचे है और उसके सिरे पर एक मोर बैठा है। वह एक सांप को खम्भे के तिगुने फासिले पर विल की तरफ़ सरसरा कर जाते हुए देख कर उस पर तिरछे टूटा तो वह कै हाथ पर सर्प के विल से मिले जब कि दोनों एक ही गति से चलते थे। (लीलावती) [२३वीं रीति से करो]

३७—सौ हाथ ऊंचे पेड़ से एक बन्दर उतर कर एक तालाब पर जो कि २०० हाथ की दूरी पर था गया। एक दूसरा बन्दर उसी पेड़ के कुछ उंचाई पर से कूद कर कर्ण मार्ग में शीघ्र उसी जगह पर गया। यदि उनके जाने की राह बराबर हो तो कूदने की उंचाई को बताओ। (लीलावती) [२३ वीं रीति से करो]

३८—रेखागणित १-४७ को लगा कर एक वर्ग बनाओ जिसका क्षेत्रफल ठीक १ एकड़ हो ॥

३९—किसी एक समकोण त्रिभुज के आधार और लंब क्रम से माप में ६·६ और ११·२ मिटर हैं तो २ समद्विवाहु त्रिभुज का विस्तार और क्षेत्रफल बताओ जिसमें कि यह विभाग किया जा सकता है ॥

४०—एक वर्ग और एक आयत की परिमिति बराबर है तो साबित करो कि वर्ग का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल से बड़ा होगा। अपने से संख्यावाचक उदाहरण बनाकर दिखाओ ॥

तीसरा प्रकरण

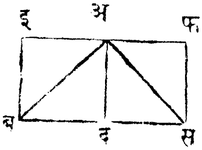
त्रिभुज (प्राय:)

२०—किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल—रेखागणित १-४१ से यदि समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज एकही आधार पर हों और एकही समानान्तर रेखाओं के बीच में हों तो समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज का दुगना होता है ॥

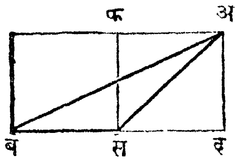
मान लो कि अ ब स एक त्रिभुज है—न्यूनकोण समकोण या अधिककोण। चूंकि कम से कम दो न्यूनकोण अवश्य होता है, इसलिये मान लो कि ब उनमें से एक है।

अ सिरे से ब स आधार पर (बढ़ा हुआ यदि आवश्यक हो) अ द लंब खींचो। स कोण के न्यून सम या अधिक होने के अनुसार इसकी तीन घटना या अवस्था होती हैं ॥

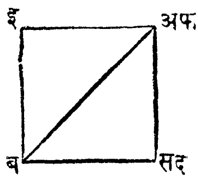
शकल ७



शकल ८



शकल ९



अगर कोण स न्यून है तो द, ब और स के मध्य में पड़ेगा। अगर कोण स सम है तो द स को ढक लेगा और अगर कोण स अधिक है तो द ब स बढ़े हुए पर पड़ेगा ॥

इन तीनों घटनाओं में अ से इ फ समानान्तर ब स के खींचो और ब और स से ब इ और स फ समानान्तर अ द के खींचो। तब हर एक हालत में त्रिभुज अ ब स और समानान्तर चतुर्भुज ब इ फ स एकही आधार ब स पर और एकही समानान्तर रेखाएं ब स और इ फ के दर्मियान हैं ॥

∴ त्रिभुज अ ब स $=\frac{1}{2}$ समानन्तार चतुर्भुज ब इ फ स

$=\frac{1}{2}\times$ आयत ब इ फ स

$=\frac{1}{2}\times$ ब स $\times$ ब इ

$=\frac{1}{2}\times$ ब स $\times$ अ द

$=\frac{1}{2}\times$ (आधार $\times$ लंब)

नियम—त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ लंब

नियम—लंब $=\dfrac{२\times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

नियम—आधार $=\dfrac{२\times \text{क्षेत्रफल}}{\text{लंब}}$

उदाहरण १—किसी एक त्रिभुज का आधार २०·३ जरीब और उसका लंब ३९·६ जरीब है तो उसका क्षेत्रफल निकालो ॥

क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times २०·३\times ३९·६=$ ४०१·९४ वर्ग जरीब

उदाहरण २—किसी एक त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल ७ एकड़ है और उसका लंब १७५ गज़ है तो आधार निकालो ॥

आधार $=\dfrac{२\times ७\times ४८४०}{१७५}=$ ३८७$\frac{1}{5}$ गज़

२८—समत्रिबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल—युक्ति २०वीं से

समत्रिबाहु त्रिभुज की उंचाई $=\dfrac{\sqrt{३}}{२}\times$ आधार ॥

इसलिये क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$ आधार $\times\dfrac{\sqrt{३}}{२}\times$ आधार

$=\dfrac{\sqrt{३}}{४}\times(\text{आधार})^{२}$

नियम—समत्रिबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $=$

$\dfrac{\sqrt{३}}{४}\times$ भुज का वर्ग ।

२९–त्रिभुज में ६ हिस्से या तत्व हैं याने तीन कोण और तीन भुज। त्रिभुज के कोण अ व स अक्षरों से बतलाए जाते हैं और उन के सामने की भुज क्रम से अ व स से ज़ाहिर किए जाते हैं। अ व स त्रिभुज का परिमित = अ + व + स जो कि अ + व + स = २ श के लिखने से संक्षेप कर दिया गया है ॥

इसलिये अ + व — स = अ + व + स — २ स = २ श — २ स = २ (श — स)

उसी तौर पर अ — व + स = २ (श — व) और — अ + व + स = २ (श — अ)

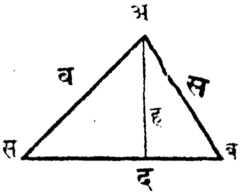
३०—किसी त्रिभुज में अ सिरे से व स आधार पर लंब

$$= \frac{\text{२}}{\text{अ}} \sqrt{\text{श} (\text{श}-\text{अ})(\text{श}-\text{व})(\text{श}-\text{स})}$$

अ व स त्रिभुज में व स = अ, स अ = व, अ व = स
मान लो कि अ से व स पर अ द लंब = ह चूंकि अ द व समकोण है।

$$\therefore \text{अ द}^2 = \text{अ व}^2 - \text{व द}^2 \text{ या } \text{ह}^2 = \text{स}^2 - \text{व द}^2 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

शकल १०



परन्तु रेखागणित २-१३ से अ स²

$$= \text{अ व}^2 + \text{व स}^2 - \text{२ व स} \times \text{व द}$$

$$\text{या } \text{व}^2 = \text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{२ अ} \times \text{व द}$$

$$\text{या } \text{२ अ} \times \text{व द} = \text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{व}^2$$

$$\text{या } \text{व द} = \frac{\text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{व}^2}{\text{२ अ}}$$

(१) में व द के स्थान में इसको रखने से

$$\text{ह}^2 = \text{स}^2 - \left(\frac{\text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{व}^2}{\text{२ अ}}\right)^2 = \frac{(\text{२अस})^2 - (\text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{व}^2)^2}{\text{४अ}^2}$$

$$= \frac{(\text{२अ स} + \text{स}^2 + \text{अ}^2 - \text{व}^2)(\text{२ अ स} - \text{स}^2 - \text{अ}^2 + \text{ब}^2)}{\text{४ अ}^2}$$

$$= \frac{\left\{(\text{स} + \text{अ})^2 - \text{व}^2\right\}\left\{\text{व}^2 - (\text{स} - \text{अ})^2\right\}}{4\,\text{अ}^2}$$

$$= \frac{(\text{अ} + \text{व} + \text{स})\ (\text{स} + \text{अ} - \text{व})\ (\text{व} + \text{स} - \text{अ})\ (\text{व} - \text{स} + \text{अ})}{4\,\text{अ}^2}$$

इस लिये $\text{ह} = \frac{1}{2\text{अ}} \sqrt{(\text{अ} + \text{व} + \text{स})\ (-\text{अ} + \text{व} + \text{स})\ (\text{अ} - \text{व} + \text{स})} \sqrt{(\text{अ} + \text{व} - \text{स})}$

$$= \frac{1}{2\text{अ}} \sqrt{2\,\text{श} \times 2\,(\text{श} - \text{अ}) \times 2\,(\text{श} - \text{व}) \times 2\,(\text{श} - \text{स})}$$

$$= \frac{2}{\text{अ}} \sqrt{\text{श}\,(\text{श} - \text{अ})\,(\text{श} - \text{व})\,(\text{श} - \text{स})}$$

३१—त्रिभुज का क्षेत्रफल जब कि तीनों भुज दी हों—

युक्ति २७ से त्रिभुज अवस का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\text{अ} \times \text{ह}$

$$= \frac{1}{2}\text{अ} \times \frac{2}{\text{अ}} \sqrt{\text{श}\,(\text{श} - \text{अ})(\text{श} - \text{व})(\text{श} - \text{स})}$$

$$= \sqrt{\text{श}\,(\text{श} - \text{अ})(\text{श} - \text{व})(\text{श} - \text{स})}$$

नियम—तीनों भुजों के जोड़ के आधे में से हर एक भुज को अलग अलग घटाओ तब आधे जोड़ और तीनों शेषों को एकत्र गुणा करो तो गुणनफल का वर्गमूल चाहा हुआ क्षेत्रफल प्राप्त होगा ॥

उदाहरण—उस त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है जिसके भुज क्रम से २२१, ३४६ और ५२५ गज़ हैं ?

२२१
३४६
५२५

२ | १०९२

$५४६ = २ \times ३ \times ७ \times १३$

$५४६ - २२१ = ३२५ = ५ \times ५ \times १३$

$५४६ - ३४६ = २०० = २ \times १० \times १०$

$५४६ - ५२५ = २१ = ३ \times ७$

$\therefore ५४६ \times ३२५ \times २०० \times २१ = २^२ \times ३^२ \times ५^२ \times ७^२ \times १०^२ \times १३^२$

क्षेत्रफल $= २ \times ३ \times ५ \times ७ \times १० \times १३ =$ २७३०० वर्गगज़

टिप्पणी—विद्यार्थी देखेंगे कि हिसाब का परिश्रम छोटे खण्डों में कर देने से कितना कम कर दिया गया है ॥

३२—इशारा क्रिया को स्पष्ट करने के लिये—

जब कि सब भुजों के एक ही समान खण्ड है तो यह अलग निकाल दिया जा सकता है और मुख्य संख्याओं में युक्ति ३१ के नियम के लगाने के बाद क्षेत्रफल के पाने के लिये उस फल को समान खण्ड के वर्ग से अवश्य गुण देना चाहिए ॥

उदाहरण—मान लो कि अ = २६००, व = २८०० और स = ३००० । तो क्षेत्रफल क्या है ?

२०० समान खण्ड अलग निकाल देने पर हम १३, १४ और १५ पाते हैं ॥

१३ $\quad २१ - १३ = ८ = २ \times २ \times २$

१४ $\quad २१ - १४ = ७ = ७$

१५ $\quad २१ - १५ = ६ = ३ \times २$

२ | ४२

$२१ = ३ \times ७$

$\therefore$ २१ × ८ × ७ × ६ = २² × २² × ३² × ७²

इसलिये क्षेत्रफल = २००² × २ × २ × ३ × ७ = <u>३३६००००</u>

सातवां अभ्यास

१—नीचे लिखे हुए त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालो

(१) अ = ४ फ़ीट	ब = १३ फ़ीट	स = १५ फ़ीट
(२) अ = ३९ गज़	ब = ६२ गज़	स = ८५ गज़
(३) अ = ४०९ कड़ी	ब = १६९ कड़ी	स = ५१० कड़ी
(४) अ = २७५ फ़ीट	ब = ४८ गज़	स = २२१ फ़ीट
(५) अ = ३१४० फ़ीट	ब = १३६५ फ़ीट	स = २१२५ फ़ीट
(६) अ = ४८५० कड़ी	ब = १८८२०० कड़ी	स = १९१०७० कड़ी

२—नीचे दिए हुए त्रिभुजों का क्षेत्रफल दशमलव के तीन स्थान तक ठीक ठीक निकालो

(१) अ = ४	ब = ५	स = ७
(२) अ = १४	ब = २५	स = ३५
(३) अ = ३०	ब = ९७	स = १२१
(४) अ = १४१	ब = २९४	स = ३७५

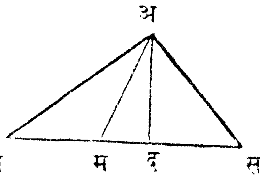
३३—अपालोनियस के प्रमेयें

परिभाषा—किसी त्रिभुज के एक कोण से एक खींची हुई रेखा सामने के भुज के मध्यविन्दु तक त्रिभुज का मिडियन कहलाती है ॥

प्रमेय १—किसी त्रिभुज में किसी दो भुजों पर के वर्ग का योग बराबर है तीसरे भुज के आधे पर के दूने वर्ग और उस मिडियन पर के दूने वर्ग के जो कि तीसरी भुज को दो बराबर हिस्सों में विभाग करता है ॥

कल्पना करो कि अ ब स एक त्रिभुज है और अ म मिडियन ब स को दो समान हिस्सों में तक़सीम करता है तो अ ब^2 + अ स^2 = २ ब म^2 + २ अ म^2

शकल ११



अद लम्ब बस पर खींचो

तो अब^2 = बम^2 + अम^2 + २ बम × मद (रेखागणित २-१२)

और अ स^2 = म स^2 + अ म^2 − २ स म × म द

इसलिये जोड़ने से चूंकि ब म = म स

हम पाते हैं कि अ ब^2 + अ स^2 = २ ब म^2 + २ अ म^2

ऊपर के संबन्ध से त्रिभुज के किसी एक को तीनों मिडियन में से निकाल सकते हैं जब कि तीनों भुजायें दी हुई हैं ॥

उदाहरण – अगर अ = १४ ब = १५ स = १३ तो अ म दर्याफ्त करो।

यहां ब म = $\frac{1}{2}$अ = ७

∴ १३^2 + १५^2 = २ × ७^2 + २ × अ म^2।

या २ अ म^2 = १६९ + २२५ − ९८ = २९६

इसलिये अ म = $\sqrt{}$१४८ = १२·१६५ निकट

प्रमेय २ – यदि अबस त्रिभुज का आधार बस, म बिन्दु पर विभाग किया जाय इस तरह कि क × ब म = ख × म स तो

क × अ ब^2 + ख × अ स^2 = क × ब म^2 + ख × म स^2 + (क + ख) × अ म^2

ऊपर के शकल में मान लो कि क × ब म = ख × म स उसी बनावट के बनाने से हम मिलता है कि अ ब^2 = ब म^2 + अ म^2 + २ ब म × म द

क से दोनों तरफ गुण देने से

क × अ ब^2 = क × ब म^2 + क × अ म^2 + २ क × ब म × म द

इसी तौर पर ख × अ स^2 = ख × म स^2 + ख × अ म^2 − २ ख × म स × म द

अब चूंकि क × व म = ख × म स तो हम पाते हैं कि

२ क × व म × म द = २ख × म स × म द

इसलिये जोड़ने से हम पाते हैं क × अ व^{२} + ख × अ स^{२}
= क × व म^{२} + ख × म स^{२} + (क + ख) × अ म^{२}

उदाहरण – अगर अ = १२ व = १५ स = १३

तो अ म को निकालो

जब कि २ व म = स म याने म आधार के तीन भाग कर देने वाला विन्दु व के निकट है ॥

यहां २ × १३^{२} + १ × १५^{२} = २ × ४^{२} + १ × ८^{२} + ३ × अ म^{२}

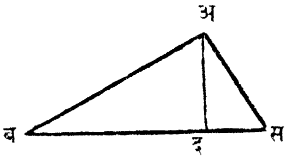
∴ अ म^{२} = $\frac{१}{३}$ (३३८ + २२५ — ३२ – ६४) = $\frac{४६७}{३}$

= $\frac{४६७ × ३}{९}$ = $\frac{१४०१}{९}$

इसलिये अ म = $\frac{\sqrt{१४०१}}{३}$ = १२·४८ निकट

३४—आधार के सामने क कोन के लंद से आधार के बने हुए खंडोंको निकालना ॥

शकल १२



हम को अ व स तीनों भुज दी हुई हैं ॥

अब वद^{२} + अद^{२} = अव^{२} = स^{२}

सद^{२} + अद^{२} = अस^{२} = व^{२}

∴ वद^{२} — सद^{२} = स^{२} — व^{२}

या (व द + स द) (व द – स द) = स^{२} – व^{२}

अब व द + स द = अ

∴ व द – स द = $\frac{स^{२} – व^{२}}{अ}$

इसलिये व द – स द मालूम हो गया है ।

और व द + स द हम पहिले ही से जानते हैं

जिस से व द और स द पृथक पृथक जाने गए हैं जैसे युक्ति २३ में ॥

उदाहरण—किसी त्रिभुज की तीनों भुज १३, १४ और १५ हैं, उन दो हिस्सों को मालूम करो जिनमें सब से लम्बी भुज सामने के कोण के लम्ब से विभाग की गई है ॥

$$\text{यहां व द–स द} = \frac{१४^२ - १३^२}{१५} = \frac{२७}{१५} = \frac{९}{५}$$

$$\text{और ब द + सद} = १५$$

$$\therefore \text{व द} = \tfrac{१}{२}(१५ + \tfrac{९}{५}) = \underline{८{\cdot}४}$$

$$\text{और स द} = \tfrac{१}{२}\,(१५ - \tfrac{९}{५}) = \underline{६{\cdot}६}$$

ऊपर के शकल में अ व स त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२} \times$ व स $\times$ अ द

और अ व द त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२} \times$ व द $\times$ अ द

इसलिये यदि अ व स त्रिभुज के क्षेत्रफल को व स से भाग देवें और व द से गुणा करें यानी $\frac{\text{वद}}{\text{वस}}$ खण्ड से गुणा करें तो अ व द त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा।

उसी तौर पर अ स द का क्षेत्रफल $= \frac{\text{सद}}{\text{वस}} \times$ क्षेत्रफल अ व स ॥

उदाहरण—पहिले उदाहरण में अ व द का क्षेत्रफल निकालो ॥

अ व स का क्षेत्रफल = ८४

$$\therefore \text{अ व द का क्षेत्रफल} = \frac{८{\cdot}४}{१५} \times ८४ = ४७{\cdot}०४$$

३५—कोई एक त्रिभुज न्यून सम अथवा अधिक कोन है जब कि सब से बड़े भुज का वर्ग दूसरे दो भुजों के वर्गों के योग से कम बराबर या ज़्यादा होता है। [रेखागणित १-४७ और २-१२ और १३]

उदाहरण १—किसी त्रिभुज की भुजाएं ७ और १० और १५ हैं तो सिद्ध करो कि वह अधिककोन है ॥

चूंकि $१५^२ = २२५$ और $७^२ + १०^२ = १४९$, $१५^२ > ७^२ + १०^२$ इस लिये १५ के सामने का कोन अधिककोन है ॥

उदाहरण २—नीचे लिखे हुए त्रिभुजों को यथा वर्ग समकोन न्यूनकोन अधिककोन में रक्खो—

(१) १३, १४, १५ (२) १०, ३५, ३९ (३) ७, १५, २० (४) ६५, ७२, ९७ (५) १३, १५, १८

आठवां अभ्यास

१—एक समत्रिवाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसकी भुज २५० फ़ीट है ॥

२—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जिसका आधार १५ फ़ीट ४ इञ्च और लम्ब ४२ फ़ीट ९ इञ्च है ॥

३—त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो जिसके भुज २००, ३०० और ४०० जरीब हैं ॥

४—एक त्रिभुजाकार क्षेत्र के एक भुज की लंबाई १७६ गज़ है और इस भुज पर लंब सामने के कोन से ८४ गज़ है तो क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो ॥

५—एक समद्विवाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है जिसका आधार ६६ फ़ीट और प्रत्येक बराबर भुज ६५ फ़ीट हैं ॥

६—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ६९४८३० वर्ग फ़ीट है और आधार ३८० गज़ है तो उंचाई क्या है ?

७—एक त्रिकोण खेत में एकड़ की संख्या बताओ जिसके भुज ३४००, ६१०० और ७५०० कड़ी हैं ॥

८—एक समत्रिवाहु त्रिभुज की परिमिति ७२ फ़ीट है तो रक़बा दरयाफ़्त करो ॥

९—एक धान के त्रिकोण खेत की तीनों भुज क्रम से २६०, ५१० और ५५० जरीब हैं तो फ़ी एकड़ ३ रु० ८ आने के हिसाब से उसके काटने का ख़र्च बताओ ॥

१०—एक त्रिकोण अनाज के क्षेत्र को जिसका आधार ६०९ फ़ीट है २ आने फ़ी वर्ग गज़ के हिसाब से वेचे जाने पर ७६१२ रु० ८ आना वसूल हुए तो त्रिभुज की उंचाई बताओ ॥

११—एक समद्विवाहु त्रिभुज की प्रत्येक बराबर भुज ५६९ गज़ है और सिरे से लंब तीसरे भुज पर ५२० गज़ है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ॥

१२—एक समत्रिवाहु त्रिभुज का लंब १०० फ़ीट है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

१३—यदि एक समत्रिवाहु त्रिभुज के लंब के स्थान में क हो तो सिद्ध करो कि रक़बा $\frac{\sqrt{३}\,क^{२}}{३}$ है ॥

१४—एक त्रिभुज के जिसके भुज क्रम से ४५, ८५ और १०४ फ़ीट हैं और उसी परिमिति के समत्रिवाहु त्रिभुज के क्षेत्रफलों में अंतर बताओ ॥

१५—एक समद्विवाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल १३३९८० वर्ग फ़ीट है और सिरे से आधार पर लंब ४३५ फ़ीट है तो त्रिभुज के भुजों को निकालो ॥

१६—अ ब स त्रिभुज की भुजाएं ब स, स अ और अ ब क्रम से ३८ और ६५ और ८७ फ़ीट हैं प से लंब जो कि एक विन्दु ब स में है ब अ भुज पर १० फ़ीट है तो प से स अ पर लंब की लंबाई निकालो ॥

१७—अ ब स त्रिभुज में ब स = १३, स अ = १४ और अ ब = १५; त्रिभुज के भीतर प एक विन्दु है और प द और प इ और प फ, प से ब स और स अ और अ ब पर लंब हैं; अगर प द = ३ और प इ = ४ हों तो प फ को दर्याप्त करो ॥

१८—एक समत्रिवाहु त्रिभुज का भुज निकालो जिसका क्षेत्रफल ५ एकड़ है; इसका फ़ीट में जवाब दो ॥

१९—एक त्रिकोण क्षेत्र ३६३ गज़ लंबा और २४० गज़ लंब रूप में ३६ पौंड सालाने की आमदनी पैदा करै तो फ़ी एकड़ किस हिसाब से सौजा गया ॥

२०—एक जगह में जहां ४० पौण्ड एकड़ के हिसाब से ज़मीन मिलती है ३०० पौन्ड का एक त्रिकोण क्षेत्र खरीदा गया जिसकी एक भुज ३०२ गज़ १ फ़ुट ६ इंच माप में ठहरी तो इस त्रिभुज की उंचाई गज़ में निकालो

२१—एक त्रिभुज के भुज ३४० वो ६५ वो २९७ फीट हैं तो वर्ग पर्च (पोल) में क्षेत्रफल बताओ ॥

२२—एक त्रिकोण क्षेत्र फ़ी एकड़ ५ पौन्ड ११ शि० ६½ पेन्स के हिसाब से १२ पौन्ड पर सौजा गया है, एक भुज ७३८ कड़ी हैं, इस भुज पर का लंब सामने के कोण से सब से नज़दीक की कड़ी तक निकालो ॥

२३—एक त्रिकोण क्षेत्र के भुज २६००, ३१५० और २५३० फ़ीट हैं तो एकड़ में रक़बा निकालो ॥

२४—एक त्रिभुज के भुज १०२ वो १०४ वो १०६ फ़ीट हैं तो वर्ग जरीब वो कड़ी में जवाब निकालो ॥

२५—एक त्रिभुज के भुज १३, १४, १५ फ़ीट हैं तो साबित करो कि इसके बिलकुल कोन न्यून हैं और सामने के कोण से १४ फ़ीट के भुज पर का लंब निकालो ॥

२६—एक त्रिभुज के भुज १२००, १४५०, १६५० फ़ीट हैं तो वर्ग गज़ में क्षेत्रफल निकालो ॥

२७—एक त्रिकोण चौक का एक भुज ९८ फ़ीट है और सामने के कोण से उस पर का लंब ६३ फ़ीट है तो फ़ी वर्ग गज़ एक रुपए ३ आने० पाई के हिसाब से उस पर पत्थर की पटिया बिछवाने में कितना ख़र्च पड़ेगा ॥

२८—एक समद्विबाहु त्रिभुज के शकल के आंगन में पत्थर की पटिया बिछवाने में ४ आना फ़ी वर्ग फ़ुट के हिसाब से ९४५ रु०

ख़र्च पड़ता है अगर आधार ४० गज़ लंबा हो तो हर एक बराबर भुज की लंबाई निकालो ॥

२९—एक समत्रिबाहु त्रिभुज में कंकड़ पटाने में फ़ी वर्गफ़ुट ६ आने के हिसाब से उतना ख़र्च लगता है जितना उसके घेरने में फ़ी गज़ ७ रु० ८ आने के हिसाब से ख़र्च होता है तो त्रिभुज की भुज निकालो ॥

३०—एक वर्ग की भुज निकालो जो कि क्षेत्रफल में एक त्रिभुज के क्षेत्रफल के जिसकी भुज १५३०, १७००, और २८९० फ़ीट हैं बराबर होगा ॥

३१—एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसका आधार २०४० फ़ीट और हर एक बराबर भुज ५१५१ फ़ीट है ॥

३२—एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसका आधार २९६ फ़ीट हैं और हर एक बराबर भुज १७५ फ़ीट है ॥

३३—एक समद्विबाहु त्रिभुज के हर एक बराबर भुज ५९३ गज़ हैं और सिरे के कोन से आधार पर लम्ब ३६८ गज़ है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ॥

३४—एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ३१२० वर्ग फ़ीट है और सिरे के कोन से आधार पर खींचा हुआ लम्ब ८० फ़ीट है तो त्रिभुज के सब भुजों को निकालो ॥

३५—एक त्रिभुज के जिसके भुज क्रम से ५२०, ७३० और ७५० फ़ीट हैं और उसी परिमिति के समत्रिबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफलों में अन्तर बताओ ॥

३६—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल २१५८८.७५ वर्ग फ़ीट है और उसकी उंचाई १२६ फ़ीट ३ इञ्च है तो आधार क्या है ॥

३७—नीचे दिए हुए त्रिभुजों को यथावर्ग अधिककोन, समकोन और न्यूनकोन में रक्खो ॥

(१) ३०१, ९००, ९०१ (२) ८, १२३, १२५
(३) ११६, १८१, २२५ (४) १५७, १६५, १८४
(५) ३१५, ५७२, ६५३ (६) ३६, ६१, ६५

३८—त्रिभुज के तीनों मिडियन की लंबाई बताओ जिसकी भुजाएं क्रम से २०, ५१ वो ६५ फ़ीट हैं ॥

३९—एक त्रिभुज के तीनों भुज २५, १०१ वो ११४ हैं, उन दो हिस्सों को निकालो जिनमें सामने के कोण से गिराया हुआ लम्ब सब से बड़ी भुजा को विभाग करता है ॥

४०—एक त्रिकोन क्षेत्र के भुज क्रम से २१७, ४०४ वो ४९५ फ़ीट हैं, हर एक कोन से सामने के भुज तक सब से कम दूरी को निकालो ॥

४१—उस त्रिभुज के भुजों के मध्य बिन्दुओं के जोड़ने से बने हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसके भुज क्रम से ८९, ९९ वो १०० फ़ीट हैं ॥

४२—एक वर्ग का भुज १२५ फ़ीट है, एक बिन्दु वर्ग के भीतर लिया गया है जो कि किसी भुज की सीमा से क्रम से ४४ फ़ीट वो ११७ फ़ीट के दूरी पर हैं, वर्ग के चारों कोनो तक उस बिन्दु के जोड़ने से बने हुए चारों त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालो ॥

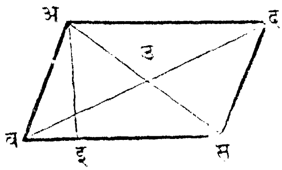
चौथा प्रकरण

समानान्तर चतुर्भुज ।

३६—गुण—(१) समानान्तर चतुर्भुज के सामने के भुज और कोन बराबर होते हैं (२) कर्ण उसे दो त्रिभुजों में विभाग करता है जिनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं (३) कर्ण एक दूसरे को बराबर दो भाग करते हैं ॥

कल्पना करो कि अ ब स द एक समानान्तर चतुर्भुज है और कर्ण एक दूसरे को उ बिन्दु पर दो समान भाग करते हैं अ से ब स पर अ इ लम्ब खींचो ॥

शकल १३



फ़र्ज़ करो कि
ब स = द अ = **अ**
अ ब = स द = **स**
अ स = **ब**, ब द = **द**
अ इ = **ह**

३०—समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल—

क्योंकि कर्ण अ स समानान्तर चतुर्भुज अ ब स द को दो बराबर त्रिभुजों अ ब स और अ स द में विभाग करता है ॥

अ ब स द का क्षेत्रफल = २ × अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= २ \times \frac{१}{२} \times ब स \times अ इ$$

$$= ब स \times अ इ = \textbf{अ ह}$$

नियम—

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × लम्ब ॥

निरूपण—इस तरह पर हम समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को निकाल सकते हैं अगर हमको एक भुज और उसपर सामने के भुज में से किसी एक बिन्दु से लम्ब दिए हों। दूसरी अवस्था ये हैं जिनमें हम उसी तौर पर समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल सहल से निकाल सकते हैं। मानलो कि अवस्था यह है जिसमें दो आसन्न भुजाएं और कर्ण दिए हुए हैं यहां पर हम युक्ति ३१ से एक त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालते हैं, और फल को दूना कर देते हैं। इस प्रकार से शकल १३ में यदि हमको अ ब, ब स और स अ मालूम है तो हम अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल जान लेते हैं और सामानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को पाने के लिये इस क्षेत्रफल को दूना कर देते हैं। फिर अगर हमको दो कर्ण अ स और ब द और एक भुज जैसे अ ब दिए हों तो हम अ ब स द का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं ॥

क्योंकि अ उ = ½ अ स, ब उ = ½ ब द

अब अ ब उ त्रिभुज के तीनों भुजों को हम जानते हैं और इसलिये उसके क्षेत्रफल को निकाल सकते हैं और समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल अ ब उ के क्षेत्रफल से चौगुण है ॥

उदाहरण १—शकल १३ में ब स = ७२६ फ़ीट; अ इ = २५ फ़ीट, तो अ ब स द का क्षेत्रफल निकालो ॥

क्षेत्रफल = ७२६ × २५ = <u>१८१५०</u> वर्गफ़ीट ॥

उदाहरण २—शकल १३ में अ ब = ३४, ब स = ६१, और ब द = ७५, तो अ ब स द का रक़बा निकालो ॥

अब त्रिभुज अ ब द में अ ब = ३४, ब द = ७५ और द अ = ६१ ॥

∴ अ ब द का रक़बा = १०२० (युक्ति ३१)

इसलिये रक़बा अ ब स द = २ × १०२० = <u>२०४०</u>

उदाहरण ३—शकल १३ में अ स = ५०, ब द = ५८, और ब स = ३६, तो अ ब स द का क्षेत्रफल निकालो ॥

यहां ब उ स त्रिभुज में ब उ = २९, स उ = २५; और ब स = ३६

∴ ब उ स का क्षेत्रफल = ३६० [युक्ति ३१]

इसलिये अ ब स द का क्षेत्रफल = ४ × ३६० = <u>१४४०</u>

नौवां अभ्यास

१—एक सामानान्तर चतुर्भुज का एक भुज ५२५ फ़ीट और सामने के भुज से लम्ब २२५ फ़ीट है तो वर्ग गज़ में क्षेत्रफल दर्यापत करो ॥

२—एक समानान्तर चतुर्भुज जिसके भुजों की लम्बाई २० और १० फ़ीट है और उसका कर्ण २५ फ़ीट लम्बा है, तो दूसरे कर्ण को लम्बाई बताओ ॥

३—एक सामानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ६५०७६० वर्ग फ़ीट है और एक कर्ण १४७९ फ़ीट है तो सामने के कोण से उस पर के लम्ब निकालो ॥

४—एक समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या है जिसका एक कर्ण ५२५ फ़ीट है और सामने के कोण से उसपर का लम्ब २७६ फ़ीट है ॥

५—एक समानान्तर चतुर्भुज का रक़बा बताओ जिसकी भुजाएं ६५ और ११९ फ़ीट और कर्ण १५६ फ़ीट है ॥

६—एक समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दर्याफ़्त करो जिसका आधार २९ फ़ीट और उंचाई १५ फ़ीट है ॥

७—एक विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिस-का भुज २५ फ़ीट और उंचाई १५ फ़ीट है ॥

८—एक चतुर्भुज क्षेत्र के कर्ण जिसकी सब भुजाएं बराबर हैं ६२५० और ७५०० कड़ी है तो इसका रक़बा क्या है ॥

९—एक विषमकोण समचतुर्भुज का भुज ५३ फ़ीट है और अधिकतर लंबा कर्ण ९० फ़ीट है तो क्षेत्रफल और दूसरा कर्ण दर्याफ़्त् करो ॥

१०—एक विषमकोण समचतुर्भुज के दो कर्ण ४०.८ और ५०.६ फ़ीट हैं तो भुज और क्षेत्रफल निकालो ॥

११—एक विषमकोण समचतुर्भुज का भुज २० और न्यूनतर कर्ण २४ है तो क्षेत्रफल और दूसरा कर्ण निकालो ॥

१२—एक विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल १ एकड़ है और एक कर्ण २७.५ गज़ है तो दूसरा कर्ण क्या है ॥

नीचे दिए हुए क्षेत्रफल और आधार वाले समानान्तर चतुर्भुजों के लंब को निकालो—

१३—क्षेत्रफल = १७१० वर्गगज़, आधार = १८० गज़

१४—क्षेत्रफल = ७ एकड़ आधार = ४४० गज़

१५—क्षेत्रफल = ३५५६८० वर्गगज़, आधार = ८५५ फ़ीट

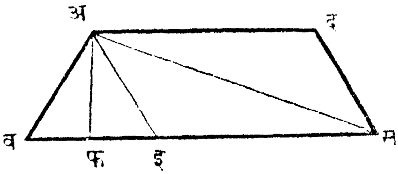
१६—एक समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न भुज १२० फ़ीट और १८० फ़ीट हैं और उसका क्षेत्रफल उसी परिमिति के वर्ग के क्षेत्रफल का आधा है तो समानान्तर चतुर्भुज के दो लंबों को बताओ ॥

पाचवां प्रकरण

समलंब

३८—परिभाषा—समलंब के ४ भुज और केवल आमने सामने के दो भुज समानान्तर होते हैं ॥

शकल १४



कल्पना करो कि अ ब स द एक समलंब है जिसकी भुजाएं ब स और द अ समानान्तर हैं अ स मिलाओ अ से स द के समानान्तर अ इ खींचो और अ से ब स पर अ फ लंब डालो ॥

अब अ ब स द समलंब का क्षेत्रफल

= अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल + अ स द त्रिभुज का क्षेत्रफल ॥

= $\frac{1}{2}$ ब स × अ फ + $\frac{1}{2}$ अ द × अ फ (चूंकि अ फ दोनों त्रिभुजों का लंब है)

= $\frac{1}{2}$ (ब स + अ द) × अ फ

नियम—समलंब का क्षेत्रफल = समानान्तर भुजों के योग के आधे को उनके बीच के लम्बरूप दूरी से गुणा करने से ॥

३९—अ ब, ब स, स द और द अ की लम्बाई दी हुई है अ फ की लम्बाई निकालना है जो कि समानान्तर भुजों के मध्य लम्ब दूरी है ॥

मान लो कि ब स = अ, स द = ब, द अ = स और अ ब = द
तो अ इ = ब, ब इ = अ—स

मानलो कि २ क = अ ब + ब इ + इ अ = द + —सअ + ब
अब युक्ति ३० से अ फ

$$= \frac{२}{ब\ इ}\sqrt{क\ (क - अ\ ब)\ (क - ब\ इ)\ (क - अ\ इ)}$$

$$= \frac{२}{अ - स}\sqrt{क\ (क - द)\ (क - अ + स)\ (क - ब)}$$

$$= \frac{२}{अ - स}\sqrt{\frac{(अ + ब - स + द)}{२}\frac{(अ + ब - स - द)}{२}\frac{(ब + स + द - अ)}{२}\frac{(अ - ब - स + द)}{२}}$$

$$= \frac{१}{२(अ - स)}\sqrt{(अ + ब - स + द)(अ + ब - स - द)(-अ + ब + स + द)(अ - ब - स + द)}$$

इसलिये समलम्ब का क्षेत्रफल

$$= \frac{१}{२}अ\ फ\ (ब\ स + अ\ द)$$

$$= \frac{१}{४}\frac{अ + स}{अ - स}\sqrt{(-अ + ब + स + द)(अ - ब - स + द)(अ + ब - स + द)(अ + ब - स - द)}$$

इस प्रकार से हम समलम्ब का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं जब कि हमको चारों भुज दिए हों

निरूपण—यदि स = ० हो तो हमको एक त्रिभुज का क्षेत्रफल मिलता है–क्योंकि इस अवस्था में अ द लुप्त हो जाता है और अ वो द मिल जाते हैं और समलम्ब त्रिभुज हो जाता है ॥

उदाहरण १—एक समलम्ब का क्षेत्रफल निकालो जिसकी समानान्तर भुजाएं ३५ फ़ोट और २५ फ़ोट हैं और उनमें लम्ब रूप दूरी २८ फ़ीट है ॥

क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ (३५ + २५) × २८ = <u>८४०</u> वर्ग फ़ोट ॥

उदाहरण २—एक समलम्ब की भुजाएं २७ और ४१ फ़ीट हैं और दूसरे भुज १३ और १५ फ़ीट तो क्षेत्रफल बताओ ॥

यहां अ = ४१, ब = १५, स = २७, द = १३

क्षेत्रफल के ऊपर की विधि में इसको स्थापित करने से हम पाते हैं कि—

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{१}{४} \times \frac{४१ + २७}{४१ - २७} \sqrt{(-४१ + १५ + २७ + १३)(४१ - १५ - २७ + १३)(४१ + १५ - २७ + १३)(४१ + १५ - २७ - १३)}$$

$$= \frac{१}{४} \times \frac{६८}{१४} \times \sqrt{१४ \times १२ \times ४२ \times १६}$$

$$= \frac{१}{४} \times \frac{६८}{१४} \times १४ \times ३ \times ८ = \underline{४०८} \text{ वर्ग फ़ीट ॥}$$

दूसरी रीति—शकल १४ में ब स = ४१, अ द = २७,

∴ ब इ = १४ वो अ ब = १३, अ इ = १५

इसलिये अ ब इ त्रिभुज का क्षेत्रफल

= ८४ वर्ग फ़ीट (युक्ति ३०) और $\text{अ फ} = \frac{२ \times ८४}{१४} = १२$

∴ अ इ स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= इ स × अ फ = २७ × १२ = ३२४

इन क्षेत्रफलों को जोड़ देने से अ ब स द का क्षेत्रफल = ८४ + ३२४ = <u>४०८</u> वर्ग फ़ीट ॥

टिप्पणी—शकल १४ में वह रेखा जो कि अ ब और अ स के मध्य विन्दुओं को जोड़ती है ब स के समानान्तर और ब स की आधी है और उसी तौर पर वह रेखा जो अ स और द स के मध्य विन्दुओं को जोड़ती है अ द (याने ब स) के समानान्तर और और अ द की आधी है, इसलिये वह रेखा जो अ ब और स द के मध्य विन्दुओं को जोड़ती है अ द या ब स के समानान्तर और अ द और ब स के आधे येाग के बराबर है ॥

दसवां अभ्यास

१—एक चतुर्भुज क्षेत्र की दो समानान्तर भुजाएं क्रम से १२७५ और १३२५ कड़ी लंबाई में हैं और उनके मध्य का लंबरूप फ़ासिला ५२४ कड़ी है तो इसका क्षेत्रफल बताओ ॥

२—७५ रु० फ़ी एकड़ के हिसाब से एक समलंब के शकल की क्षेत्र की क़ीमत निकालो जिसकी समानान्तर भुज ३७५२८ फ़ीट और ४२४७२ फ़ीट है और उनके मध्य में लंब की दूरी ४९६१ फ़ीट है ॥

३—एक तख्ते में कितने वर्ग फ़ीट हैं जिसकी लंबाई १६ फ़ीट ८ इंच और दोनों किनारों की चौड़ाई $२\frac{३}{४}$ फ़ीट और $२\frac{१}{४}$ फ़ीट है ॥

४—एक समलंब का क्षेत्रफल निकालो जिसकी समानान्तर भुज ४८ और ६० फ़ीट हैं और दूसरे भुज ५५ और ६५ फ़ीट हैं ॥

५—एक समलंब के समानान्तर भुज ७७४०० और १४०४०० फ़ीट हैं और दूसरे भुज २५००० और ५२००० फ़ीट हैं तो वर्ग मील में रक़बा निकालो ॥

६—एक समलंब का क्षेत्रफल ४७५ वर्ग फ़ीट है और दोनों समानान्तर रेखाओं के मध्य में लंब की दूरी १९ फ़ीट है तो दोनों समानान्तर भुजों को निकालो जिनका अंतर ४ फ़ीट है ॥

७—एक समलंब का क्षेत्रफल $३\frac{१}{२}$ एकड़ है और दो समानान्तार भुजों का योग २९७ गज़ है तो उनके मध्य की लंब रूप दूरी निकालो ॥

८—एक समलंब का क्षेत्रफल निकालो जिसके भुज क्रम से १३ वो ११ वो १५ वो २५ हैं और दूसरा चौथे का समानान्तर है ॥

९—एक समलंब का क्षेत्रफल २.५ एकड़ है और समानान्तर भुजों का योग ६२५० कड़ी है तो समानान्तर भुजों के मध्य का लम्ब निकालो ॥

१०–एक अ ब स द समलंब जिसके समानान्तर भुज अ ब वो द स क्रम से ३७ और २३ फ़ीट हैं स विन्दु से स इ रेखा अ ब में इ विन्दु तक खींची गई है जो समलंब को दो भागों में विभाग करती है तो अ इ की लंबाई बताओ ॥

११—अ ब स द एक चतुर्भुज शकल है, अ ब, स द के समानान्तर है और अ ब = ब स = द अ = २०५ फ़ीट और स द = ५१७ फ़ीट तो क्षेत्रफल क्या है ॥

१२—एक समलंब के भुज २०४, ३६९, ३२५ और ११६ गज़ हैं और दूसरा चौथे के समानान्तर है। सिद्ध करो कि पहिले दो से अंतर्गत कोन समकोन है और क्षेत्रफल निकालो ॥

१३–एक मकान का अंत समलंब के शकल का है और सामने की दीवार २६ फ़ीट है और पीछे की दीवार ३४ फ़ीट ऊंची है और दीवारों में फासिला १८ फ़ीट हैं तो अंत का क्षेत्रफल निकालो ॥

१४–एक चतुर्भुज क्षेत्र के दो भुज बराबर और दूसरे दो भुज समानान्तर हैं, बरावर भुज प्रत्येक १०० फ़ीट हैं, और समानान्तर भुज क्रम से ६०० और ७६० फ़ीट हैं तो रक़बा दर्याफ्त करो ॥

१५–एक समलंब के असमानान्तर भुजों के मध्य विन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा ३६७ गज़ है और समानान्तर भुजों के मध्य की दूरी २५० गज़ है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

१६—एक समलंब के समानान्तर भुज क्रम से ८ और १० मिटर हैं और उनके मध्य की दूरी ४ मिटर है, लंब चार बरावर हिस्सों में भाग किया गया है और विभाग के विन्दुओं से समानान्तर रेखा समानान्तर भुज के खींची हुई हैं, इस तौर पर ४ बने हुए समलंब के क्षेत्रफल को निकालो ॥

छठवां प्रकरण

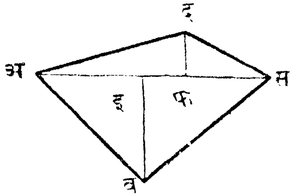
चतुर्भुज (प्रायः)

४०—चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकाला जा सकता है जब कि कोई कर्ण और सामने की राशि से उस पर के दो लंब दिए होते हैं ॥

कल्पना करो कि अ ब स द एक चतुर्भुज है और ब और द से अ स कर्ण पर क्रम से ब इ और द फ लंब हैं अब क्षेत्रफल

अ ब स द = अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल + अ स द त्रिभुज का क्षेत्रफल

शकल १५



$= \frac{1}{2}$ अ स × ब इ $+ \frac{1}{2}$ अ स × द फ

$= \frac{1}{2}$ अ स (ब इ + द फ)

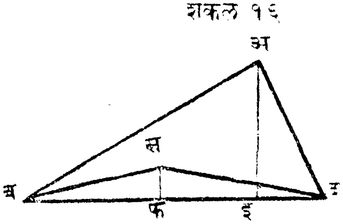
नियम—चतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्ण और सामने के राशि से उस पर के लंबों के योग के गुणनफल का आधा ॥

अनुमान—जब कि कर्ण आपस में समकोण बनाते हैं तो यह प्रत्यक्ष है कि क्षेत्रफल कर्णों के गुणनफल के आधे के बराबर है ॥

४१—यदि चतुर्भुज में भितरी कोण हो अर्थात् वह गगनाकार हो तो युक्ति ४० में सुधारना अवश्य है क्योंकि एक कर्ण शकल के बाहर पड़ता है ॥

कल्पना करो कि अ ब स द एक गगनाकार चतुर्भुज है और कर्ण ब द शकल के बाहर पड़ता है। बिन्दु अ और स से ब द पर क्रम से अ इ वो स फ लंब डालो।

शकल १६



तब क्षेत्रफल अ ब स द

= क्षेत्रफल अ ब द — क्षेत्रफल ब स द

$= \frac{1}{2}$ ब द × अ इ — $\frac{1}{2}$ ब द × स फ

$= \frac{1}{2}$ ब द (अ इ — स फ)

ग्यारहवां अभ्यास

१—अ ब स द एक बाग़ का क्षेत्रफल नीचे दिए हुए कल्पना (निर्दिष्ट) से निकालेा-

भुज अ ब = ४१०० गज़, अ द = ८४०० गज़, स द = १०४०० गज़, ब स = ४५०० गज़, एक सड़क ८५०० गज़ लम्बी ब से द तक जाती है ॥

२—चतुर्भुज का एक कर्ण जो कि शकल के बाहरी ओर पड़ता है १३५ गज़ है और सामने के कोणों से उसपर लम्बों का अंतर २५ गज़ है तो क्षेत्रफल निकालेा ॥

३—चतुर्भुज का एक कर्ण ६४० गज़ है और सामने के कोणों से लम्ब २६६ और १३४ गज़ हैं तो क्षेत्रफल निकालेा (१) यह मान कर कि कर्ण भीतर है, (२) यह मान कर कि कर्ण शकल के बाहर है ॥

४—एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल १० एकड़ २ रूड है और सामने के कोनेां से कर्ण पर के लम्बों का येाग १५४ गज़ है तेा कर्ण निकालेा ॥

५—एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल १२ एकड़ २ रूड २५ पेाल है एक कर्ण २५ जरीब है तो सामने के देानेां कोणों से इस कर्ण पर के लम्बों का येाग दर्याफ्त करेा ॥

६—एक चतुर्भुज में कितने वर्ग गज़ शामिल हैं जब कि उस का एक कर्ण ६० गज़ और उस पर के लम्ब १२·६ और ११·४ गज़ हैं ॥

७—एक चतुष्कोण चैाक में कितने वर्ग गज़ पत्थर की पटिया हैं जिसका कर्ण ५४ फ़ीट है और सामने के कोणों से उसपर के लम्ब क्रम से २५ और १७½ फ़ीट हैं ॥

८—अ ब स द खेत का रक़बा बताओ; अ ब = १२० गज़, ब स = २५० गज़, स द = १०० गज़, द अ = ९० गज़ और कर्ण अ स = १७० गज़ ॥

९—एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या है जिसके कर्ण एक दूसरे के साथ समकोण बनाते हैं और माप में क्रम से १०० और १२५ फ़ीट हैं ॥

१०—नीचे दिए हुए कल्पना से अ ब स द चतुर्भुज का क्षेत्र-फल निकालो—

अ ब = २११, ब स = १२६, स द = १५५, द अ = २२९; अ से ब स और स द पर के लंब क्रम से १३९ और १६६ हैं। दिखलाओ कि कुछ कल्पना इस प्रश्न में अनर्थक है ॥

११—एक अ ब स द चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा अगर अ ब = ३३७, स द = ४'१७, और कर्ण अ स = ४'१२ फ़ीट, और यदि ब और द से लंब क्रम से म और न विन्दुओं में कर्ण से मिलते हैं जिस से कि अ न = २८४ और स म = २७७ फ़ीट और अ न, अ म से बड़ा है ॥

१२—एक चतुर्भुज क्षेत्र का एक कर्ण ३२'५ कड़ी है और सामने के कोनों से उसपर के लंब १२५ और ७५ कड़ी हैं हैं तो कितने वर्ग जरीब क्षेत्र के अंतर्गत हैं ॥

१३—प उ र स शकल का क्षेत्रफल नीचे दिए हुए कल्पना से निकालो—

प उ = २५, उ र = ३३, र स = २५, स प = ५१, और कर्ण प र = ५२ ॥

१४—एक चतुर्भुज क्षेत्र के भुज २०४, २५३, ११६, २३१ गज़ हैं और पहिले दो का अंतर्गत कोन समकोण हैं तो रक़बा बताओ ॥

१५—रेखागणित १.४७ में अगर अ स ब त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो, समकोण स पर हो और अ स, ब स पर के वर्ग अ क ह स और ब इ द स हों तो अ क इ ब और अ ह द ब चतुर्भुजों के क्षेत्रफल क्या हैं जब कि अ स और स ब क्रम से ४८ और ५५ फ़ीट हैं ॥

सातवां प्रकरण

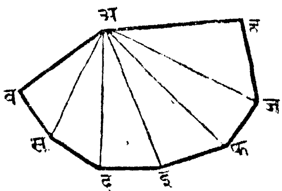
विषम ऋजुभुज क्षेत्र।

४२—किसी विषम ऋजु भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल उसे दो त्रिभुजों और समलंबों में विभाग करने और युक्ति १४, ३१ और ३७ की विधियों को लगाने से निकाला जा सकता है ॥

कुछ उदाहरणों से हम इस बात को प्रकाशित करेंगे।

उदाहरण १—कल्पना करो कि अ ब स द इ फ ज ह एक ऋजु भुज क्षेत्र है। किसी एक अ सिरे से दूसरे सिरों तक रेखा खींच कर इसे त्रिभुजों में विभाग करो तो यदि हम अ ब, ब स, स द, द इ, इ फ, फ ज, ज ह, ह अ, अ स, अ द, अ इ, अ फ, अ ज की लंबाई नापें तो हम सहल से क्षेत्र अ ब स द इ फ ज ह का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं ॥

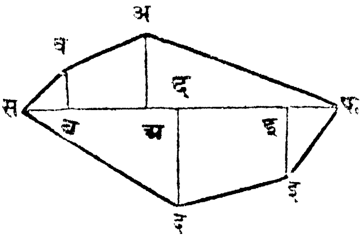
शकल १७



क्योंकि क्षेत्रफल अ ब स द इ फ ज ह = क्षेत्रफल अ ब स + क्षेत्रफल अ स द + क्षेत्रफल अ द इ + क्षेत्रफल अ इ फ + क्षेत्रफल अ फ ज + क्षेत्रफल अ ज ह ॥

उदाहरण २—अ ब स द इ फ ऋजुभुजक्षेत्र में कोन विन्दुओं से कर्ण स फ पर अ अ, ब ब, द द, इ इ लंब शकल को ब स ब, अ अ फ, स द द, फ इ इ, समकोण त्रिभुजों और ब ब अ अ और द द इ इ समलंबों में विभाग करते हुए खींचे गए हैं ॥

शकल १८



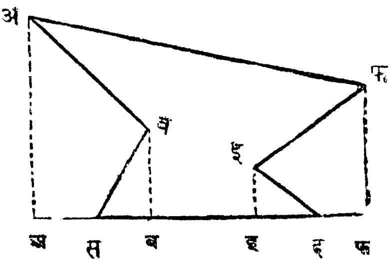
इसलिये क्षेत्रफल अ ब स द इ फ = स ब ब + ब ब अ अ + अ अ फ + फ इ इ + इ इ द द + द द स = ½ स ब × ब ब + ½ (ब ब + अ अ) अ ब + ½ अ अ × अ फ + ½ फ इ × इ इ + ½ (द द + इ इ) × द इ + ½ द द × स द ॥

परिभाषा—अ अ, ब ब, द द, इ इ रेखाओं को स फ रेखा के संबन्ध से लंब (आफ़सेट) कहते हैं ॥

कभी कभी इकट्ठा करने वाली शकलों को जोड़ने के बदले में घटाना पड़ता है जैसे नीचे के उदाहरण में ॥

उदाहरण ३---विषम ऋजुभुजक्षेत्र अ ब स द इ फ में स द दोनों तरफ बढ़े हुए पर अ, ब, इ, फ, विन्दुओं से लंब डाल कर हम देखते हैं कि क्षेत्रफल अ ब स द इ फ = समलंब अ अ फ फ—समलंब अ अ ब ब—समलंब इ इ फ फ +, त्रिभुज ब ब स + त्रिभुज इ इ द ॥

शकल १९



बारहवां अभ्यास

१—अ ब स द इ एक पञ्चभुजक्षेत्र है, नीचे के निर्दिष्ट से उसका क्षेत्रफल एकड़ में निकालेा

ब इ = १२५ जरीब, स इ = १३६ जरीब, अ और स से ब इ पर के लंब क्रम से ४३ और २९ जरीब हैं और द से स इ पर का लंब २१ जरीब है ॥

२—अ ब स द इ क्षेत्र का क्षेत्रफल नीचे दिए हुए निर्दिष्ट से बताओ—

अ द = २५० जरीब, ब प, स उ और इ र, भुज अ द पर लंब हैं, और ब प = ११०, स उ = ९५, और इ र = २४ जरीब, और अ प = १०, और द उ = ३९ जरीब ॥

३—अ ब स द इ एक पञ्चभुज है और अ, ब और स समकोण हैं, अगर अ ब = ७५ फ़ीट, ब स = ६८ फ़ीट, स द = ४० फ़ीट, अ इ = ५६ फ़ीट, तेा उस शकल का क्षेत्रफल और द इ की लंबाई निकालेा ॥

४—एक चतुर्भुज खेत का एक भुज २५० गज़ है और सामने के कोनों से लंब १३५ और १२५ गज़ हैं, पहिले लंब का आधार दिए हुए भुज के सब के नज़दीक के सिरे से २४ गज़ है, और दूसरे लंब का आधार दूसरे सिरे से ३२ गज़ है तेा रक़बा बतलाओ ॥

५—अ ब स द इ फ ज एक विषमबहुभुजखेत है और अ अ, ब ब, द द, इ इ, फ फ, कर्ण स ज पर लंब हैं, यदि ज फ = १५ फ़ीट, फइ = ३५ फ़ीट, इद = ४८ फ़ीट, स द = १२ फ़ीट, अ अ = २४ फ़ीट, ब ब = २५ फ़ीट, फ फ = १८ फ़ीट, इ इ = ४४ फ़ीट, द द = १२ फ़ीट, अ ब = १० फ़ीट, ब स = ५४ फ़ीट, तेा इसका रक़बा बताओ ॥

६—अ ब स द इ फ एक षटभुज क्षेत्र है और अ प, ब उ, द र और इ ग कर्ण स फ पर लंब हैं, स फ = ७५ फ़ीट, अ प = २३ फ़ीट,

प उ = ३२ फ़ीट, द र = ४२ फ़ीट, इ श = ३८ फ़ीट, स र = १० फ़ीट, स उ = १२ फ़ीट, फ प = १८ फ़ीट, फ श = १६ फ़ीट, ते। इसका क्षेत्रफल बताओ ॥

७—अ ब स द इ खेत के भुज क्रम से दिए हुए हैं, याने अ ब = ६५ गज़, ब स = ११६ गज़, स द = २०४ गज़, द इ = २५२ गज़; और इ अ = ७५ गज़, और कर्ण ब इ = २० गज़, और स इ = १२० गज़, तो इस खेत का क्षेत्रफल निकालो ॥

८—एक पञ्चभुजक्षेत्र अ ब स द इ के कर्ण अ द की लंबाई ५२४ फ़ीट है और इस कर्ण पर के लंब इ प, ब उ, स र, क्रम से २५, ३१३ और २६७ फ़ीट हैं। अ से ये लंब क्रम से ३१०, १२६ और ४२५ फ़ीट के अंतर पर उस कर्ण से मिलते हैं ते। क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो ॥

९—एक अ ब स द चतुर्भुजक्षेत्र के ब द कर्ण पर दे। लंब अ म और स न जो क्रम से ४९८ कड़ी और ६७२ कड़ी हैं खींचे गए हैं, और भी ब म = ७६, और ब न = ५१३ कड़ी, और संपूर्ण रेखा ब द ९९९ कड़ी है, ते। अ ब स द क्षेत्र का क्षेत्रफल निकाले। दिखलाओ कि यहां कुछ निर्दिष्ट अनर्थक हैं ॥

१०—नीचे दिए हुए निर्दिष्ट से अ ब स द इ पञ्चभुजक्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ—

अ ब = २१००, ब स = ४५००, स द २२००, द इ = ३४००, अ इ = २४००, और कर्ण अ स = ६०००, और अ द = ५००० ॥

११—शकल १९ युक्ति ४२ में अ ब स द इ फ का रक़बा क्या है जब कि ब ब = १०फ़ीट, इ इ = ८फ़ीट, फ फ = २५ फ़ीट, अ अ = ३० फ़ीट, अ स = ५ फ़ीट, स ब = ६ फ़ीट, ब इ = २६ फ़ीट, इ द = १२ फ़ीट, द फ = २ फ़ीट ॥

१२—युक्ति ४२ शकल १८ में अ ब स द इ फ का क्षेत्रफल निकाले। जब कि स फ = २९ फ़ीट, स ब = ५ फ़ीट, ब अ = १० फ़ीट, अ द = १ फ़ुट , ब इ = २१ फ़ीट, इ फ = ५ फ़ीट, स द = २० फ़ीट, ब ब = ६ फ़ीट, अ ब = २६ फ़ीट ॥

आठवां प्रकरण

कोनों के विषय में

४३—कोनों की माप—रेखागणित में कोन का पैमाना मालूम करने के लिये सिर्फ़ समकोन ही लिया गया है और उसका फैलाव बदल नहीं सकता (स्वयंसिद्ध ११) और वह स्वभाव ही से बहुत सीधा कोन की माप है। इस सब से स्वाभाविक पैमाने के सिवाय गणितकार लेाग तीन और पैमानों को काम में लाते हैं। हाल के काम में हम अपने को अंश और उसके भागप्रतिभाग ही से यानी अंश (डिग्री), ग्रेड, और रेडियन से अपना काम करेंगे॥

अंश समकोण का ९०वां हिस्सा है और अंश का ६० वां हिस्सा मिनट (पल) और मिनट का ६० वां हिस्सा सेकंड (विपल) कहलाता है। अंश पल और विपल क्रम से ° ′ ″ ऐसे चिन्हों से दिखाए जाते हैं, इस तरह से ५९ अंश १८ पल १७ विपल ५९° १८′ १७″ लिखे जाते हैं॥

४४—कोन जो कि मिलकर एक समकोन बनाते हैं आपस में कोटि कहलाते हैं और हर एक कोन दूसरे का कोटिकोन कहलाता है। इस तरह से ३०° और ६०° कोटिकोन हैं और इसीतरह से अ और ९०°–अ कोटिकोन कहलाते है। अगर कोन मिलकर दो समकोन बनावें तो वे आपुस में पूरक कहे जाते हैं और हर एक दूसरे का न्यूनता पूरक कहलाता है इस तरह से ६०° औ १२०° पूरककोन हैं और अ और १८०°—अ भी पूरक कोन हैं॥

४५—हर एक त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर दो समकोन या १८०° होते हैं और न संख्या के भुज वाले बहुभुजक्षेत्र के न कोन मिलकर २ (न–२) समकोन के या १८० (न–२) अंशों के बराबर होते हैं॥

इसलिये किसी न भुजेां के क्रमिक बहुभुज क्षेत्र में हर एक कोन $\frac{२(न-२)}{न}$ समकोन या $\frac{१८०(न-२)}{न}$ अंशों को रखता है ॥

परिभाषा—बहुभुजक्षेत्र क्रमिक कहा जाता है जब कि उसके सब भुज और कोन बराबर होते हैं

तेरहवां अभ्यास

१—(१) एक समत्रिबाहु त्रिभुज, (२) एक वर्ग, (३) एक क्रमिक पंचभुज, (४) एक क्रमिक षष्ठभुज, (५) एक क्रमिक सप्तभुज, (६) एक क्रमिक अष्टभुज, (७) एक क्रमिक नौभुज, (८) एक, क्रमिक दशभुज, (९) एक क्रमिक एकादशभुज, (१०) एक क्रमिक द्वादशभुज, (११) एक क्रमिक पंचदश भुज, (१२) एक क्रमिक वीस भुज के कोनेां को अंश में निकालो ॥

२—नीचे दिए हुए समकोण के दशमलवों को अंश, पल और बिपलों में दिखलाओ ॥

(१).००५, (२).००१२५, (३) .०२, (४) .३३३, (५).०००१ ॥

३—नीचे लिखे अंश, पल, आदि को समकोण के दशमलव में दिखलाओः—

(१) ४२° २८′ ४८″, (२) ४° ०′ १८″, (३) ४४° १६′ ४८″

४—सिद्ध करो कि अगर न भुजेां के बहुभुज क्षेत्र के भुज दोनों तरफ बढ़ाए जांय कि एक सितारे की सकल बन जाय तो हर एक अन्यान्यानुगामी जोड़ों के मध्य के कोनेां का योग २(न–४) समकोण है ॥

५—दिखलाओ कि नीचे दिए हुए बहुभुज क्रमिक क्षेत्रों के प्रत्येक समूह में ४ समकोनेां का योग है—

(१) ६ समत्रिबाहु त्रिभुज, (२) दो अष्टभुज और १ बर्ग (३) दो षटभुज और दो समत्रिबाहु त्रिभुज, (४) तीन षष्ठभुज, (५) दो पंचभुज और एक दशभुज ॥

६—एक क्रमिक बहुभुजक्षेत्र का बाहरी कोण एक समकोण का चौथाई है तो बहुभुज क्षेत्रमें भुजों की संख्या क्या है ॥

७—एक समद्विबाहु त्रिभुज का एक कोन १२०°दिया हुआ है तो दूसरे कोनों को निकालो ॥

८—एक त्रिभुज के दो कोन क्रम से १७° १८′ ५९″ और १२° १९′ १८″ हैं तो तीसरा कोन निकलो ॥

९—१०० भुजों के क्रमिक बहुभुज क्षेत्र के प्रत्येक कोनों में कितने अंश हैं ॥

१०—एक समकोण त्रिभुज का एक न्यूनकोन ४३° ३७′ ५७·५″ है, दूसरे न्यून कोन का मान निकालो ॥

११—एक समद्विबाहु त्रिभुज का शीर्ष कोन ३५° ११′ ४८″ है तो कितने अंश पल विपल प्रत्येक दूसरे कोनों में हैं ॥

१२—एक षटभुजाकार कमरे की प्रत्येक भुज १५ फ़ीट है तो सिद्ध करो कि गच्च के पच्चीकारी के काम के लिये ७ पटिया काली संगमरमर की हर एक क्रमिक षटभुजाकार और १२ पटिया सफ़ेद संगमरमर की हर एक समत्रिबाहुत्रिभुजाकार काफ़ी होगी, षटभुज और समत्रिबाहुत्रिभुज की हर एक भुज ५ फ़ीट के बराबर हैं; सादृश्य रूप से प्रतिमा को खींचो ॥

१३—एक समकोनत्रिभुज के दो न्यून कोनों का अंतर १५° १६′ है तो कोनों को निकालो ॥

१४—एक त्रिभुज एक कोन दूसरे दो कोनों के योग का आधा है तो उसे बताओ ॥

१५—एक मधु मक्खी के छत्ते का मुह क्रमिक षटभुजों के बराबर है, साबित करो कि यह गणित से मुमकिन है ॥

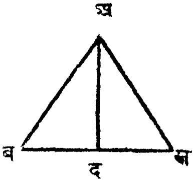
१६—एक मक्खी की खाल जब खुर्दबीन से जांची गई तो क्रमिकषटभुजों और समत्रिबाहुत्रिभुजों के बराबर संख्याओं की एक ख़ूब सूरत शकल मालूम हुई; इसे खींचो और दिखलाओ कि गणित से शुद्ध है ॥

नवां प्रकरण

मिश्रित साध्य ।

४६—कल्पना करो कि अ ब स एक समत्रिबाहु त्रिभुज है और अ से ब स पर अ द लंब है तो < अ ब स = ६०° और ब अ द = ३०°

शकल २०



यदि ब स = अ तो ब द = $\frac{१}{२}$ अ और

अ द = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ अ (युक्ति २०) ॥

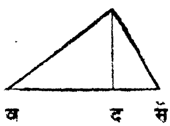
नियम—अगर समकोण त्रिभुज में एक कोन = ३०° हो तो इस कोन के सामने का भुज = आधे कर्ण और तीसरा भुज = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ × कर्ण और उन भुजों में जिनके अंतर्गत समकोण है अधिकतर कोन = $\sqrt{३}$ × न्यूनतर । इसी तरह इसके विरुद्ध भी यों होगा—

अगर समकोन त्रिभुज का कर्ण एक भुज का दूना हो तो इस भुज के सामने का कोन = ३०°

विद्यार्थियों के लिये नीचे दिए हुए तीन उदाहरण ऊपर के दो नियमों का व्योहारिक प्रयोग रखते हैं ॥

४७—उदाहरण १—एक त्रिभुज के दो भुज क्रम से १५ फ़ीट और १६ फ़ीट हैं और अंतर्गत कोन ३०° है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

शकल २१



मान लो कि अ ब = १५, ब स = १६, ब स पर अ द लंब खींचो

तो ४६ युक्ति से अ द = $\frac{१}{२}$ अ ब = $\frac{१५}{२}$

∴ क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ × १६ × $\frac{१५}{२}$

= ६० वर्ग फ़ीट

नियम--अगर एक त्रिभुज के अ और व भुजों का अंतर्गत कोन ३०° है तो क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ अ व॥

४८---उदाहरण २--पहिले उदाहरण में यदि अंतर्गत कोन ६०° है तो क्षेत्रफल निकालेा॥

यहां युक्ति ४६ से अ द = अ व × $\frac{\sqrt{3}}{२} = \frac{१५\sqrt{३}}{२}$

∴ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times १६ \times \frac{१५\sqrt{३}}{२} = ६०\sqrt{३}$

नियम-अगर एक त्रिभुज के अ और व भुजों का अंतर्गत कोन ६०° है तो क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{४}$ अ व

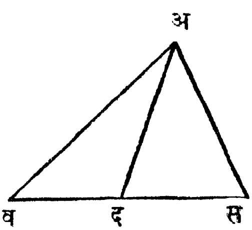
४९—उदाहरण ३—पहिले उदाहरण में अगर अंतर्गत कोन ४५° है तो क्षेत्रफल बताओ॥

यहां युक्ति १९ से अ द = अ व × $\frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{१५}{\sqrt{२}}$

∴ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times १६ \times \frac{१५}{\sqrt{२}} = ६०\sqrt{२}$

नियम—यदि एक त्रिभुज के अ व भुजों का अन्तर्गत कोण ४५° है तो क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{२}}{४}$ अ व

शकल २२



५०—शकल २२ में यदि व द, द स आपुस में बराबर और एक ही सीधी रेखा में हों त्रिभुज व अ द और स अ द क्षेत्रफल में बराबर होंगे अब व अ द और स अ द त्रिभुजों में भुज व द और द अ क्रम से स द और द अ भुजों के बराबर हैं और अंतर्गत कोण व द अ, स द अ न्यूनतापूरक है। इसलिये—

नियम—यदि एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभुजों के दो भुजों के क्रम से बराबर हों और अन्तर्गत कोन न्यूनतापूरक हो तो त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं ॥

इस प्रकार से अगर एक त्रिभुज के दो भुजाएं २० फ़ीट और २५ फ़ीट हैं और अन्तर्गत कोन १२०° है तो उसका क्षेत्रफल = उस त्रिभुज के क्षेत्रफल के जिसकी दो भुजाएं २० फ़ीट और २५ फ़ीट हैं और अंतर्गत कोन ६०° हैं। तो आगे क्रिया करने से

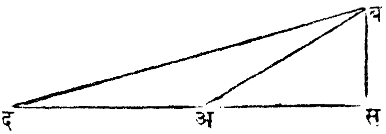
(जैसे उदाहरण २ युक्ति ४८ में)

प्रत्येक इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल $= २० \times २५ \times \frac{\sqrt{३}}{४}$

$= १२५\sqrt{३}$ वर्ग फ़ीट ॥

५१—शकल २३ में मान लो कि $\angle$ अ व स = ६०°, $\angle$ व अ स = ३०°, $\llcorner$ अ स व = ९०°

शकल २३



फ़र्ज़ करो कि व स = क तो अ व = २ क और अ स = $\sqrt{३}$क (युक्ति ४६) स अ को द तक बढ़ाओ कि अ द = अ व = २ क तो $\angle$ व द अ $= \frac{१}{२} \angle$ व अ स = १५°

अब व द $= \sqrt{क^२ + (२+\sqrt{३})^२ क^२} = क\sqrt{८+४\sqrt{३}} = (\sqrt{६}+\sqrt{२})$ क

नियम—यदि समकोण त्रिभुज में एक न्यूनकोन १५° हो तो कर्ण $= (\sqrt{६}+\sqrt{२}) \times$ १५° कोन के सामने का भुज और तीसरा भुज $= (२ \times \sqrt{३}) \times$ सब से छोटी भुज ॥

५२—शकल २३ में अगर व अ स = ४५° तो अ व स ४५° और अ स व = ९०° और अ द = अ व, $\angle$ अ द व

$= २२\frac{१}{२}^\circ$; मान लेा कि ब स = क तेा अ स = क, अ व = क $\sqrt{२}$,
अ द = क $\sqrt{२}$, स द = क + क $\sqrt{२}$ = $(\sqrt{२}+१)$क

$\therefore$ व द = $\sqrt{क^२ + (\sqrt{२}+१)^२ क^२}$ = क $(\sqrt{४+२\sqrt{२}})$

५१ युक्ति के म्वाफ़िक़ और नियम भी निकाले जा सकते हैं ॥

५३—अन्तर मापने के यन्त्र (थिओडोलाइट) से हम उस कोन को माप सकते हैं जो कि देखने वाले की आंख और किसो देखाई देती हुई चीज़ के जोड़नेवाली रेखा और आकाश कक्षा की समता के अनुरूप मैदान से बनता है। जब कि पदार्थ आकाश के कक्षा रूपी मैदान के ऊपर है तो यह उंचाई का कोन कहा जाता है और जब कि नीचे है तो उस पदार्थ का दबाव कोन कहा जाता है ॥

उदाहरण---एक पेड़ के जड़ से १०० फ़ीट पर इसके सिरे के उंचाई का कोन ६०° पाया गया तो पेड़ की उंचाई बताओ ॥

शकल ४ युक्ति १९ में व स = १००, $<$ व = ६०°,

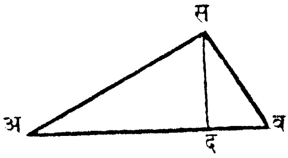
अब युक्ति ४६ से अ स = $\sqrt{३}$ × व स

$\therefore$ उंचाई = <u>१०० $\sqrt{३}$</u> ॥

५४—मान लेा कि अ व स एक समकोन त्रिभुज है जिसका स कोन समकोन है, स से अ व पर लंब स द खींचो।

रेखागणित २.१४ साध्य के प्रमाण से यह ज़ाहिर है कि स द पर का वर्ग बराबर है आयत अ द × द व के, द व पर का वर्ग दोनो में जोड़ देने से आयत अ द, द व और द ब पर का वर्ग, मिलकर बराबर है स द और द व पर के वर्गों के योग के ॥

शकल २४



इसलिये आयत अ व × व द = व स पर के वर्ग। उसी तैार पर आयत व अ × अ द = अ स पर के वर्ग के ॥

परिभाषा—शकल २४ में अ द, अ स का अ ब पर बहिर्लंबन कहा जाता है और ब द, ब स का अ ब पर बहिर्लंबन कहा जाता है ॥

नियम---अगर किसी समकोन त्रिभुज में समकोण से कर्ण पर लंब खींची जाय तो लंब पर का वर्ग बराबर है कर्ण के खण्डों के अन्तर्गत आयत के, और समकोण बनाने वाले भुजों में से किसी एक पर का वर्ग बराबर है कर्ण के और उसके खण्ड के अन्तर्गत आयत के जो उस भुज के आसन्न है (याने जो उस भुज का कर्ण पर बहिर्लंबन है) ॥

उदाहरण—शकल २४ में अगर अ द = २७ फ़ीट, ब द = ३ फ़ीट, तो स द, स ब और अ स निकालो ॥

$$स\ द = \sqrt{२७ \times ३} = ९ \text{ फ़ीट},\quad ब\ स = \sqrt{३० \times ३} = ३\sqrt{१०}$$ फ़ीट, $$अ\ स = \sqrt{३० \times २७} = ९\sqrt{१०} \text{ फ़ीट}$$ ॥

५५—फिर २४ शकल के सम्बन्ध से हम पाते हैं ॥

$$\frac{१}{अ\ स^२} + \frac{१}{ब\ स^२} = \frac{अ\ स^२ + ब\ स^२}{अ\ स^२ \times ब\ स^२}$$

$$= \frac{अ\ ब^२}{अ\ स^२ \times ब\ स^२} = \left(\frac{अ\ ब}{अ\ स \times ब\ स}\right)^२$$

$$= \left(\frac{अ\ ब}{२\ \text{क्षेत्रफल}\ अ\ ब\ स}\right)^२$$

$$= \left(\frac{१}{\frac{२\ \text{क्षेत्रफल}\ अ\ ब\ स}{अ\ ब}}\right)^२ = \frac{१}{स\ द^२}$$

नियम—समकोण त्रिभुज में समकोण से कर्ण पर जो लम्ब खींचा गया है उसके रेसीप्रोकल * का वर्ग = समकोन बनाने वाले भुजों के वर्गों के योग के ॥

उदाहरण—शकल २४ में अ स = .३ फुट, व स = .२५ फुट, तो स द बतलाओ

$$\frac{१}{द स^२} = \frac{१}{अ स^२} + \frac{१}{व स^२} = \left(\frac{१}{\frac{१}{३}}\right)^२ + \left(\frac{१}{\frac{१}{४}}\right)^२ = ३^२ + ४^२ = ५^२$$

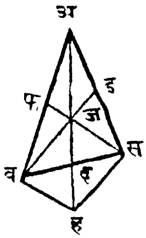
$\therefore$ स द = $\frac{१}{५}$ = .२ फुट

५६—यदि किसी त्रिभुज के तीनों मिडियन मालूम हों तो क्षेत्रफल दर्याफ्त करो ॥

अ व स त्रिभुज में अ द, व इ, स फ मिडियन एक ही विन्दु ज पर मिलते हैं स विन्दु से स ह, व ज के समानान्तर खींचो जो ज द के बढ़े हुए भाग से ह विन्दु पर मिलता है।

इस शकल के रेखागणित से यह प्रगट है कि स ज = $\frac{२}{३}$ स फ, व ज = स ह = $\frac{२}{३}$ व इ, ज ह = $\frac{२}{३}$ अ द

शकल २५



इसलिये जब मिडियन मालूम हैं तो ज स ह का क्षेत्रफल मालूम है। परन्तु त्रिभुज स ज ह = त्रिभुज व स ज = $\frac{१}{३}$ त्रिभुज अ व स। इसलिये मिडियनों से त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने में हम हर एक मिडियन का $\frac{२}{३}$ लेते हैं, और युक्ति ३१ से इन लम्बाइयों को उस त्रिभुज के भुजाएं कल्पना कर के त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालते हैं, तब इस फल का तिगुना, चाहा हुआ क्षेत्रफल होता है ॥

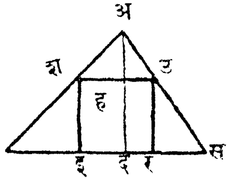
* हेरा फेरी से होने वाला या अदल बदल से होने वाला जैसा कि $\frac{३}{२}$ और $\frac{२}{३}$ से जाहिर होता है।

५७—यदि एक वर्ग एक त्रिभुज के भीतर बना हो और त्रिभुज के आधार और लम्ब मालूम हों, तो वर्ग का भुज दर्याफ्त करो ॥

फ़र्ज़ करो कि श उ र इ त्रिभुज अ ब स के भीतर बना हुआ वर्ग है और अ द विन्दु अ से ब स पर लम्ब खींचा गया है; मानलो कि ब स = अ, अ द = ह, श उ = श,इ = ह,द = उ,र = ल

अब क्षेत्रफल अ ब स = क्षेत्रफल अ श उ + क्षेत्रफल श इ ब + क्षेत्रफल उ र स + क्षेत्रभल श उ र इ या

शकल २६



या $\frac{1}{2}$ ब स × अ द

= $\frac{1}{2}$ श उ × अ ह + $\frac{1}{2}$ श इ × ब इ + $\frac{1}{2}$ उ र × र स + श उ²

= $\frac{1}{2}$ श उ × अ ह + $\frac{1}{2}$ श उ (ब इ + र स) + श उ²

याने $\frac{1}{2}$ अह = $\frac{1}{2}$ ल (ह - ल) + $\frac{1}{2}$ ल (अ – ल) + ल²

या $\frac{1}{2}$ अ ह = $\frac{1}{2}$ ह ल + $\frac{1}{2}$ अ ल

या ल (अ + ह) = अ ह

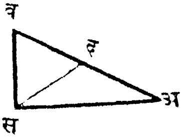
$$\therefore \text{ल} = \frac{\text{अ} \times \text{ह}}{\text{अ} + \text{ह}}$$

नियम—उस वर्ग का भुज जो किसी त्रिभुज के अन्दर बना हो

$$= \frac{\text{आधार} \times \text{लम्ब}}{\text{आधार} + \text{लम्ब}}$$

५८—हर एक समकोण त्रिभुज उस रेखा से जो समकोन से कर्ण के मध्य विन्दु तक खींची जाती है दो समद्विबाहु त्रिभुजों में विभाग हो सकता है ॥

कल्पना करो कि अ ब स समकोण त्रिभुज है जिसका कोन स समकोन है; स पर कोन अ स द = ब अ स के बनाओ, तो अ द = स द, और कोन ब स द = अ ब स



शकल २७

∴ ब द = स द

इसलिये अ द = स द = ब द और त्रिभुज अ स द और ब स द दोनों समद्विबाहु त्रिभुज हैं ॥

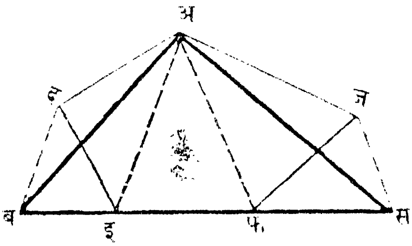
अनुमान—अगर ∠ब = ६०° तो त्रिभुज ब स द समत्रिबाहु त्रिभुज है और अ ब = २ ब स

७६—विषमक्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने का व्यवहारिक रीति यह है कि एक ऐसे त्रिभुज के भुजों को दर्याफ्त कर लेते हैं जिसका क्षेत्रफल खेत के क्षेत्रफल के बराबर है ॥

मान लो कि अ द इ फ ज एक विषमऋजुभुज क्षेत्र है, अ इ और अ फ को मिला दो,

विन्दु द से अ इ के समानान्तर द ब, वो विन्दु ज से अ फ के समानान्तर ज स खींचो जिसमें द ब और ज स, इ फ बढ़े हुए से क्रम से ब और स विन्दुओं पर मिलते हैं; तो त्रिभुज अ ब इ = त्रिभुज अ द इ, और त्रिभुज अ फ स त्रिभुज अ ज फ

शकल २८



इसलिये त्रिभुज अ ब स = शकल अ द इ फ ज। व्यवहारिक रीति यह है कि शकल अ द इ फ ज को जिस पैमाने से चाहो खींचो और शकल को ऊपर के रीति से बनाने के उपरान्त अ ब, ब स वो स अ की लंबाई दर्याफ़्त कर लो, जिस से क्षेत्रफल अ ब स (याने अ द इ फ ज) युक्ति ३० के अनुसार मालूम हो जायगा ॥

चौदहवां अभ्यास

१—एक त्रिभुज के दो भुज १०५ और ६२५ फ़ीट हैं और अंतर्गत कोन ३०° है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

२—एक त्रिभुज के दो भुज २०० कार ३०५ फ़ीट हैं और उनका अंतर्गत कोन ६०° है तो क्षेत्रफल निकालो ॥

३—किसी त्रिभुज के दो भुज २९ और २४ जरीब हैं और वे ४५° का कोन अंतर्गत रखते हैं तो क्षेत्रफल बताओ ॥

४—एक त्रिभुज के दो भुजाएं २० और ३० जरीब हैं और उनका दर्मियानी कोन समकोन है तो क्षेत्रफल क्या है ॥

५—एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार १०० फ़ीट है और शीर्ष कोन १२०° है तो क्षेत्रफल दर्याफ़्त करो ॥

६—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल २० वर्गफ़ीट है और एक कोन ४५° है और उन भुजों में से एक भुज जिनसे वह कोन बनता है २.५ फ़ीट है तो दूसरे भुज निकालो ॥

७—एक त्रिभुज के दो भुज २५ फ़ीट और ४७ फ़ीट हैं और उनसे बना हुआ कोन ४५° है तो क्षेत्रफल बताओ ॥

८—एक त्रिभुज की दो भुजाएं क्रम से १५७ और १२५ फ़ीट हैं और अन्तर्गत कोन ३०° है क्षेत्रफल दर्याफ़्त करो ॥

९—एक त्रिभुज के भुज १, १, $\sqrt{२}$ संख्याओं की संबंध से हैं; साबित करो कि कोन १, १, २ संख्यायों के संबंध में हैं ॥

१०—किसी त्रिभुज के कोनों में निस्बत (संबंधी) १, २, ३ की है तो सिद्ध करो कि इसके भुजों में १, $\sqrt{३}$ और २ की संबंधी है ॥

११—एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जब कि शीर्ष कोन ६०° और आधार १०० फ़ीट है ॥

१२—एक विषमकोन समचतुर्भुज का क्षेत्रफल दर्याफ़्त करो जिसका भुज १६ गज़ है और एक कोन १२०° ॥

१३—एक समानान्तर चतुर्भुज के भुज ६२.५ और ३८.९ जरीब हैं और उनके मध्य का कोन ३०° है; क्षेत्रफल निकालो ॥

१४—एक पतङ्ग के तने हुए १०० फ़ीट नख से और आसमान के साथ बना हुआ कोन ३०° है तो गुड्डी की उंचाई बताओ ॥

१५—अ ब स त्रिभुज में भुज अ ब और अ स क्रम से ६२ और ९७ फ़ीट हैं और मिडियन स फ = १२० फ़ीट तो अ ब स का क्षेत्रफल निकालो ॥

१६—अ ब स त्रिभुज में अ ब और अ स भुज क्रम से २५ और ४५ फ़ीट हैं और मिडियन अ द = ३० फ़ीट ; ब स भुज निकालो ॥

१७—मिडियन ब इ और स फ त्रिभुज अ ब स में क्रम से ११४ और १९५ फ़ीट हैं और भुज ब स = १७४ फ़ीट तो क्षेत्रफल अ ब स और अ द मिडियन की लम्बाई क्या होगी ॥

१८—अगर किसी त्रिभुज के मिडियन क्रम से १०५, १५६ और २१९ फ़ीट हों तो उसका रक़बा क्या है ॥

१९—एक त्रिभुज के आधार और लंब क्रम से २४ और ३६ फ़ीट हैं तो त्रिभुज में बने हुए वर्ग की भुज निकालो जब कि वर्ग की एक भुज त्रिभुज के आधार पर पड़ता हो ॥

२०—ताजमहल के एक धरहरे को परिछांही की लंबाई ७६·७ फ़ीट है, धरहरे को उंचाई क्या होगी जब कि सूर्य के उंचाई का कोन ६०° है ॥

मिश्रित उदाहरण

१—एक ३५१ गज़ लम्बे और २८० गज़ चौड़े आयताकार दिल बहलाने की फुलवाड़ी के हर एक कोनों में एक त्रिभुजाकार फूलों की किआरी है जिसकी दो बराबर भुजाएं हर एक २५ गज़ हैं, इन फूलों की कियारिओं को निकाल देने से कितनी जगह बाक़ी रह जाती है ॥

२—दो अगिनबोट एक ही समय एक ही बन्दर से चले एक उत्तर-उत्तर-पश्चिम की तरफ़ फ़ी घण्टा छः मील के हिसाब से, दूसरा पूरब-उत्तर-पूरब की तरफ फ़ी घंटा ८ मील के हिसाब

से जाता है तो ८ घण्टे के अन्त में वे कितनी दूर अलग हो जांयगे ॥

३—एक दालान ५० फ़ीट लम्बा और ४ गज़ चौड़ा है और इसकी पिछली दीवार अगली से ५ फ़ीट ज़्यादा ऊंची है तो दालान के ऊपर के ढालुए छत का क्षेत्रफल निकालो ॥

४—५ फ़ीट ४ इञ्च लम्बे आदमी का छाया दो फ़ीट है तो विजयानगरम धरहरे की उंचाई क्या होगी जिसकी छाया उसी समय ७५ फ़ीट की पड़ती है [युक्ति २]

५—एक मकान की चौड़ाई २७ फ़ीट है वो ओलती (ओरी) की उंचाई ३५ फ़ीट और शिखा की उंचाई ४५ फ़ीट है तो मकान के एक पाखा का रकबा दर्याफ़्त करो ॥

६—यदि १८ इञ्च चौड़ाई का १५६ ¼ गज़ कागज़ एक कमरे की दीवारों के मढ़ने में लगाया जाय तो कितने गज़ कागज़ २० इञ्च चौड़ा उन्हीं दीवारों के मढ़ने में लगेगा ॥

७—४४ खिड़कियों के लिये जो हर एक ५ फ़ीट लम्बी और ३ फ़ीट ६ इञ्च चौड़ी है हर एक ९ इञ्च लम्बे ७ इञ्च चौड़े शीशे के परकाले कितने लगेंगे ॥

८—एक कमरे के फ़र्श का क्षेत्रफल जो १०० फ़ीट लंबा और ६० फ़ीट चौड़ा है दो और कमरों के क्षेत्रफल से कितना अधिक होगा जब कि इनमें से हर एक का विस्तार ऊपर के विस्तार का आधा है ॥

९—२३ फ़ीट ९ इञ्च वर्ग चौक के एक भुज के पास पास एक पगडंडी ५ फ़ीट चौड़ी बनी है तो बताओ कि फ़ी वर्ग गज़ ४ आने के हिसाब से शेष चौक में पत्थर बिछाने में क्या ख़र्च पड़ेगा ॥

१०—एक कमरे का मंडल ६४ फ़ीट और उंचाई १६ फ़ीट है और उसमें ८ फ़ीट ऊंचा ४ फ़ीट चौड़ा एक दरवाज़ा वो हर एक ५ फ़ीट लंबी वो ३ फ़ीट ६ इञ्च चौड़ी ४ खिड़कियां हों तो दो फ़ीट चौड़ा कागज़ किस क़दर उसके दीवारों के मढ़ने में लगेगा ॥

११—एक समकोन त्रिभुज का आधार ३०० फ़ीट और बाक़ी दो भुजों का योग १००० फ़ीट है तो इनकी लंबाई क्या होगी॥

१२—अ ब स द एक चतुर्भुजाकार खेत में किसी रुकावट के कारण सिर्फ़ नीचे ही की माप ले सकते हैं॥

ब स=२६५ गज़, अ द=२२१ गज़, कर्ण अ स=३७६ गज़; और उस कर्ण के अंतों से ब इ और द फ लंबों के आधारों की दूरी याने अ इ=११२ गज़ और स फ=२३६ गज़; तो क्षेत्रफल बताओ॥

१३—एक आयताकार कमरे की उंचाई चौड़ाई से दूनी है और लंबाई उंचाई से दूनी है, अगर ६ आना फ़ी वर्गगज़ के हिसाब से उसके फ़र्श के गच्च कराने का ख़र्च ३७५ रु० दिया हो तो कमरे का विस्तार निकालो। यह भी बताओ कि फ़ी १०० वर्ग फ़ीट १ रु० ४ आने के हिसाब से दीवारों और भीतरी छत्त के पोताने में कितना ख़र्च होगा जब कि दीवारों के क्षेत्रफल का पांचवां हिस्सा दरवाज़ों इत्यादि के वजह से निकाल दिया जाय॥

१४—किसी समकोन त्रिभुज का कर्ण २१२५ फ़ीट और आधार उंचाई का ३१/७५ है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा॥

१५—एक वर्गाकार आंगन का कर्ण ६६ फ़ीट है तो फ़ी २५ वर्ग गज़ ३ रु० १२ आने के हिसाब से उस आंगन में कंकड़ पिटाने का ख़र्च क्या होगा॥

१६—एक त्रिभुज की भुजाएं ३४६५ वो ३३४४ वो ३०४७ फ़ीट हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग गज़ में बताओ॥

१७—एक चतुर्भुज अ ब स द में अ ब=१७०, ब स=५२७, स द=२६१, द अ=३५७, और कर्ण अस = ६००, क्षेत्रफल निकालो॥

१८—१ १/३ फ़ीट चौड़े सीधे तख़्ते में से किस क़दर लंबाई काट ली जावे कि उसकी सतह १० वर्ग गज़ हो॥

१९—उस समत्रिभुज का भुज दर्याफ्त करो जिसका क्षेत्रफल उस वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो जिसका कर्ण १८० फ़ीट है ॥

२०—अ ब स द एक चतुर्भुज क्षेत्र है, अ ब = २९७ गज़, ब स = ३०४ गज़, स द = २५० गज़, द अ = २२५ गज़, अ स = ४२५ गज़, इसका क्षेत्रफल एकड़ में क्या होगा ॥

२१—२० फ़ीट लम्बे १६ फ़ीट चौड़े १०$\frac{१}{२}$ फ़ीट ऊंचे कमरों के दीवारों के लिये २७ इञ्च चौड़े कागज़ की लंबाई क्या होगी; इसमें दो खिड़कियां ६ फ़ीट × ४ फ़ीट वो एक द्वार ७ फ़ीट × ४ फ़ीट वो एक अग्निकुंड ४ फ़ीट × ३ फ़ीट ६ इञ्च है ॥

२२—एक चतुर्भुज की भुजाएं क्रम से ८, ८, ७, ५ फ़ीट हैं और पहिले दो का अंतर्गत कोन ६०° है, क्षेत्रफल निकालो ॥

२३—एक फुलवारी १४० फ़ीट लंबी वो १२० फ़ीट चौड़ी है, उसके भीतरी भाग फुलवारी के सीमा में आधी दूर तक एक बराबर चौड़ाई का कंकड़ीला बाट १० फ़ीट चौड़ा बनवाना है, इसका क्षेत्रफल बताओ ॥

२४—एक खेत के ४ झाड़िओं में से दो समानान्तर हैं और क्रम से १००० गज़ और ९३६ गज़ लंबी हैं, एक आदमी इन समानान्तर झाड़ियों के बीच में खड़ा हो कर यह देखता है कि वह घोड़ा जिसको वह २५ गज़ रस्सी से चक्कर देता है उस जगह से जहां वह खड़ा है उन दोनों समानान्तर झाड़िओं तक की सब से छोटी रेखा पार करने में उसके दो बराबर भाग कर देता है, इस खेत का क्षेत्रफल एकड़ में निकालो ॥

२५—एक त्रिभुज की भुजाएं २०, ३०, वो ४० जरीब हैं, इस का रक़बा वर्गमील में निकालो ॥

२६—दो वर्ग खेतों के क्षेत्रफलों का जोड़ १० एकड़ है और एक का भुज दूसरे के भुज का $\frac{३}{४}$ है तो हर एक में कितने एकड़ हैं ॥

२७—एक विषम कोन समचतुर्भुज के कर्ण क्रम से ६० फ़ीट श्रीर ४५ फ़ीट हैं, क्षेत्रफल बताओ; इसको एक भुज श्रीर उंचाई भी दर्याफ्त करो ॥

२८—एक २२ फ़ीट लंबे २० फ़ीट चौड़े वो १३ फ़ीट ऊंचे कमरे को ५$\frac{१}{३}$ गज़ चौड़े कागज़ से मढ़ने में कितने कागज़ की ज़रूरत होगी ॥

२९—एक वर्ग का भुज १०० फ़ीट है, इस वर्ग के भीतर एक भुज के दोनों सिरों से एक विन्दु क्रम से ६० फ़ीट श्रीर ८० फ़ीट दूर लिया गया है तो इस वर्ग के चारों कोनों तक इस विन्दु के जोड़ने से बने हुए चार त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालो ॥

३०—समलंब की समानान्तर भुजाएं १५७.६ मिटर श्रीर ९.४ मिटर हैं श्रीर उनकी मध्य लंबरूप दूरी ७२ मिटर है तो इसमें कितने वर्ग मिटर हैं ॥

३१—एक चौक का क्षेत्रफल १३ एकड़ १०८९ वर्ग गज़ है, यदि यह चौक वर्गाकार हो तो फ़ी घंटा २$\frac{१}{२}$ मील के हिसाब से इसके चारों तरफ़ चलने में कितने समय की ज़रूरत होगी ॥

३२—एक विषम कोन समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ३५४१४४ वर्ग फ़ीट है श्रीर एक कर्ण ६७२ फ़ीट है, तो दूसरा कर्ण, इसके एक भुज की लंबाई, श्रीर उंचाई निकालो ॥

३३—द्वादशमलव की रीति से उस आयत का क्षेत्रफल निकालो जिसकी लंबाई ९ फ़ीट ९ इञ्च १० बारहवां वो चौड़ाई ४ फ़ीट ६ इञ्च ७ बारहवां है ॥

३४—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जब कि उसकी भुजाएं १४.८ गज़ १५.३ गज़ वो १७.५ गज़ हैं ॥

३५—२६ फ़ीट लंबी श्रीर १८ फ़ीट चौड़ी कोठरी में ४ शिलिङ्ग ८ पेन्स फ़ी गज़ के हिसाब से २७ इञ्च चौड़ी दरी बिछाने का ख़र्च निकालो ॥

३६—एक आयताकार खेत की भुजाएं $\frac{१}{५००००}$ के स्केल (पैमाना) से एक नक़शे में .६५ वो .७२ इञ्च खींची हुई होती हैं,

इस खेत का क्षेत्रफल एकड़ में और कर्ण की लंबाई गज़ में लाओ ॥

३७—दो बराबर ऊंचे वर्ग कमरों में से एक दूसरे का हर तरफ़ विस्तार में दूना है और दोनों में फ़ी वर्ग गज़ ६ पेन्स के हिसाब से दीवारों पर कागज़ मढ़ने का ख़र्च ८ पौंड६ शि० ८ पेन्स और फ़ी वर्ग फ़ोट ४ शि० के हिसाब से उनके फ़र्श पर दरी बिछाने का ख़र्च १०० पौं० लगता है तो उंचाई और लंबाइयां दर्याफ़्त करो ॥

३८—एक आयताकार घास के मैदान की भुजाएं क्रमसे ४५ गज़ १ फ़ुट और ३७ गज़ १ फ़ुट ६ इञ्च हैं तो बताओ कि कितने वर्ग फ़ोट घास इसमें और लगाई जावे कि उसका स्वरूप वर्गाकार मैदान हो जाय जिसका व्यास उस आयत का एक कर्ण हो ॥

३९—एक आयताकार कमरे के बगल की दो दीवारों का क्षेत्रफल ८०६ वर्ग फ़ोट, अंत की दो दीवारों का क्षेत्रफल५४६ वर्ग फ़ोट और फ़र्श का क्षेत्रफल ६५१ वर्ग फ़ोट है तो कमरे का विस्तार क्या है ॥

४०—एक त्रिभुज में शीर्ष से आधार पर का लंब ५ फ़ोट है और इस लंब के आधार से भुजों पर के लंब ४ फ़ोट और ३ फ़ोट हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ॥

४१—एक टेढ़ी मार्ग की लंबाई बताओ जो फ़ी ८ इञ्च में १ इञ्च उंचाई के हिसाब से पारसनाथ पहाड़ी की चोटी तक बनी है जिसकी उंचाई ४५०० फ़ोट है ॥

४२—एक त्रिभुज की भुजाएं १५, १४, १३ फ़ोट हैं, वर्ग कड़ी में क्षेत्रफल निकालो ॥

४३—किसी समकोण त्रिभुज की एक भुज ३९२५ फ़ोट है कर्ण और दूसरे भुज का अन्तर ६२५ फ़ोट है तो कर्ण और दूसरी भुज निकालो ॥

४४—एक वर्ग वाटिका का भुज ५० गज़ है और ५ फ़ीट बराबर चौड़ाई का एक रास्ता इसके बाहर बना हुआ है। अगर रास्ते के हद्दों पर पेड़ लगाए जांय तो फ़ी लगातार फ़ुट दो पाई के हिसाब से क्या लागत होगी॥

४५—अ ब स द खेत का क्षेत्रफल एकड़ में लाओ। अ द = ३९० गज़, ब स = ३७० गज़, अ स = ४०० गज़, अ ब = १३० गज़ और स द = २५० गज़॥

४६—एक आयताकार बाग़ माप में ३६ गज़ २ फ़ीट ९ इञ्च लम्बा और २४ गज़ १ फ़ुट १०½ इञ्च चौड़ा होता है। उसके बाहर की ओर चारों तरफ़ ४½ फ़ीट चौड़ी और भीतर की ओर ६ फ़ीट चौड़ी राहों के क्षेत्रफल में क्या फ़र्क़ होगा॥

४७—एक समानान्तर चतुर्भुज की दो भुजाएं १०.६२ वो १५.३५ फ़ीट हैं और उनके बीच का कोण ३०° है। क्षेत्रफल बताओ॥

४८—अनाज का एक वर्ग खेत १० एकड़ है, यदि एक किसान ५ फ़ीट फ़ी लवन के हिसाब से उसके चारों तरफ़ घूम घूम कर लवे तो बताओ कि वह तीन चौथाई क्षेत्रफल लवने में कै फेरा लगावैगा॥

४९—एक त्रिभुजाकार खेत का आधार १२१० गज़ है और उंचाई ४९६ गज़ है। यह सालाने २४८ पौंड के लगान पर असामी को दिया गया है तो फ़ी एकड़ लगान दर्याफ्त करो॥

५०—१५ फ़ीट ८ इञ्च लम्बे वो ११ फ़ीट ३ इञ्च चौड़े कमरे में बिछाने के वास्ते ¾ गज़ चौड़ी किस क़दर चटाई लगेगी और फ़ी गज़ ६ आना के हिसाब से क्या ख़र्च होगा॥

५१—एक आयताकार मैदान एक मील लम्बा १५७१ गज़ चौड़ा है, अगर इसके एक कोने से छोटे भुज तक एक घेरा बनाया जाय कि ४६२ एकड़ ज़मीन अलग हो जाय तो घेरे की लम्बाई बताओ॥

५२—यदि एक विषम कोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल १ लाख २० हज़ार वर्ग फ़ीट वो भुज ४०० फ़ीट हो तो कर्णों को निकालो ॥

५३—एक समलंब की समानान्तर भुजाएं ५५ वो ८८ फ़ीट हैं और बाक़ी दो भुजाएं २५ वो ५२ फ़ीट हैं, क्षेत्रफल बताओ ॥

५४—किसी स्टेशन के चबूतरा के दो भुज समानान्तर और बाक़ी दो भुज बराबर हैं समानान्तर भुजाएं क्रम से १०० वो १२० फ़ीट और प्रत्येक बराबर भुज १५ फ़ीट है, क्षेत्रफल बताओ ॥

५५—एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएं ३५०, ४४० वो ७५० गज़ हैं और इसका सालाना लगान २६ पौ० ५ शि० है तो फ़ी एकड़ क्या लगान होगा ॥

५६—एक त्रिभुज की तीनों भुज ८००, ५००, ११०० कड़ी थे। भूल से तीसरा भुज ११०० के स्थान में ५०० लिखा गया तो इस भूल से क्षेत्रफल में क्या अशुद्धता होगी ॥

५७—एक विषम कोण समचतुर्भुज की भुज २० फ़ीट और उसका छोटा कर्ण बड़े कर्ण का $\frac{3}{4}$ है, क्षेत्रफल निकालो ॥

५८—एक समत्रिबाहु त्रिभुज के एक भीतरी बिन्दु से तीनों भुजों पर खींचे हुए लंब क्रम से ८, १० वो १२ फ़ीट हैं, त्रिभुज का क्षेत्रफल और भुज निकालो ॥

५९—एक त्रिभुज की भुजाएं क्रम से १३०००, ३७००० और ४०००० फ़ीट हैं तो इसके और उसी परिमिति के समत्रिबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफलों में क्या संबन्ध होगा ॥

६०—एक त्रिभुजाकार खेत जो माप में ३७५, ३०० वो २२५ गज़ है ८५०० पौं० पर बेचा गया, फ़ी एकड़ दाम बताओ ॥

६१—एक वर्ग का क्षेत्रफल २२·२ है तो इसके आधे रक़बा के वर्ग की भुज निकालो ॥

६२—एक विषम कोण समचतुर्भुज की भुज ३६ फ़ीट और कर्ण १८ फ़ीट हैं तो क्षेत्रफल और दूसरा कर्ण बताओ ॥

६३—त्रिभुजाकार आंगन में कंकड़ बिछाने का ख़र्च फ़ी वर्ग फ़ुट १५ पेन्स के हिसाब से ९४½ पौं० होता है, यदि एक भुज २४ गज़ लंबा हो तो दूसरे दोनों बराबर भुजों को निकालो ॥

६४—३० गज़ लंबे और १२ गज़ चौड़े कमरे के चबूतरे के वास्ते १० फ़ीट लंबे और ८ इञ्च चौड़े पटरे कितने लगेंगे ॥

६५—एक समत्रिबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल १९४३.७३७ वर्ग फ़ीट है, इसको भुज निकालो ॥

६६—एक वर्ग आंगन का कर्ण ३०० फ़ीट है तो वर्ग गज़ में क्षेत्रफल लाओ ॥

६७—एक ज़मीन के टुकड़े की भुजाएं क्रम से ४९०, ३००, ४००, ३०० गज़ हैं, सब से बड़े भुज के आसन्न कोणों में से एक ९०° है; एकड़ में क्षेत्रफल बताओ ॥

६८—एक चतुर्भुज क्षेत्र का एक कर्ण जो क्षेत्र के बाहरी तरफ़ पड़ता है १४० है और उसपर के लंबों का अंतर ३२ है, क्षेत्रफल बताओ ॥

६९—एक त्रिभुज के तमाम भुज १६५, २२०, २७५ फ़ीट हैं रोड और पोल में इसका क्षेत्रफल निकालो ॥

७०—एक आयताकार चौक का क्षेत्रफल ३६० वर्ग गज़ है और उसके भुजों का संबंध १ : ४.४ है। एक बराबर चौड़ाई का फ़र्श उस चौक के दो आसन्न भुजों के साथ बना हुआ है और चौक के क्षेत्रफल का आधा है; सिद्ध करो कि फ़र्श की चौड़ाई ४ गज़ है ॥

७१—एक त्रिभुज की भुजाएं जिसकी परिमित ४६२ फ़ीट है ६, ७ और ८ के संबंध से हैं, क्षेत्रफल बताओ ॥

७२—एक फ़र्श २८ फ़ीट लंबा वो २० फ़ीट चौड़ा है, दो और फ़र्श हैं जिनका विस्तार पहिले का आधा है, पिछले दोनों फ़र्शों के और पहिले फ़र्श के क्षेत्रफल में कितना फ़र्क़ है ॥

७३—उस समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज क्या होगी जिसका क्षेत्रफल उस वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा जिसका कर्ण १२० फ़ीट है ॥

७४—एक त्रिभुज की भुजाएं क्रम से १५००, १७०० और २३०० कड़ी हैं तो एकड़ रोड और पर्च (पोल) में इसका क्षेत्रफल निकालेा ॥

७५—फ़ी एकड़ २ पौंड १४ शि० ६ पेन्स के हिसाब से एक वर्ग क्षेत्र का किराया २७ पौं० ५ शि० होता है तो फ़ी गज़ ९ पेन्स के हिसाब से उस क्षेत्र के चारों तरफ़ छड़ लगवाने में क्या ख़र्च पड़ेगा ॥

७६—एक रेल को सड़क की लम्बाई ४७½ मील है वो औसत चौड़ाई उस ज़मीन की जिसमें वह बनी है ५७ गज़ है तो ज़मीन के मोल लेने में फ़ी एकड़ ५० पौं० के हिसाब से क्या देना होगा ॥

७७—एक समलम्ब का एक समानान्तर भुज दूसरे समानान्तर भुज से १ फ़ुट ज़्याद: लम्बा है वो इसकी चौड़ाई १ फ़ुट है और क्षेत्रफल २१६ वर्ग इञ्च है तो समानान्तर भुजों को निकालेा ॥

७८—एक खेत में जिसकी तीनों भुजाएं बराबर हैं फ़ी १०० वर्गफ़ीट ५ आने के हिसाब से घास लगवाने में ५५ रु० ६ आ० ९ पाई ख़र्च पड़ता है। इसके एक भुज की लम्बाई बताओ ॥

७९—एक मकान २७ फ़ीट चौड़ा है और भूमि से ओलतो की दूरी ३३ फ़ीट है वो छप्पर की लम्बरूप उंचाई १२ फ़ीट है तो इसके एक पाखे की रङ्गवाई फ़ी वर्गगज़ १ शि० ९ पेन्स के हिसाब से कितना लगैगा ॥

८०—एक त्रिभुज की भुजाएं तरतीब से २५, ३९ और ५६ फ़ीट हैं तो उन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बताओ जिसमें यह त्रिभुज सब से बड़े भुज पर सामने के कोण से लम्ब गिराने से विभाग होता है ॥

८१—एक घन की तमाम सतह ३७५० वर्ग फ़ीट है तो इसके किनारे की लम्बाई दर्याफ्त करो ॥

८२—एक वर्ग चौक में ४४ गज़ वर्ग फुलवारी लगाई गई है जिसके चारों ओर बराबर चौड़ाई का रास्ता बना है, फुलवारी और रास्ते के क्षेत्रफल १६ : ९ हैं, रास्ता कितना चौड़ा है ॥

८३—एक २० फ़ीट × १८ फ़ीट कमरे के बीच में १८ फ़ीट × १६ फ़ीट नाप की एक दरी इस तरह से बिछी है कि चारों ओर बराबर चौड़ाई का किनारा छूट गया है तो बताओ कि इस किनारे में ४ शि० ३ पेन्स १ वर्ग गज़ के हिसाब से फ़र्श बिछवाने में क्या ख़र्च लगेगा ॥

८४—एक कमरा माप में २८ फ़ीट × १६ फ़ीट है इसके मध्य में एक तूरानी दरी २४ × १२ फ़ीट बिछी है तो बताओ कि फ़र्श के शेष खण्ड में २० इञ्च चौड़ा टाट किस क़दर लगेगा ॥

८५—१२ फ़ीट ६ इञ्च लम्बे ९$\frac{1}{2}$ इञ्च चौड़े तख्ते ५० फ़ीट लम्बे १९ फ़ीट चौड़े कमरे में कितने लगेंगे ॥

८६—एक चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल जिसकी दो भुजाएं समानान्तर हैं १५ एकड़ है और समानान्तर भुजों का योग २७५ गज़ है तो समानान्तर भुजों के बीच की लम्बरूप दूरी निकालो ॥

८७—एक सीढ़ी २५ फ़ीट लम्बी इस तरह दीवार पर लगी है कि उसका सिरा ज़मीन से २४ फ़ीट ऊंचा है और उसके ठीक बीचो बीच से दीवार के नींव तक एक रस्सी बन्धी है, तो रस्सी की लम्बाई दर्याफ्त करो और यह साबित करो कि उससे सीढ़ी के सरकने में रोकावट नहीं होती ॥

८८—एक आयताकार खेत १३२० गज़ लम्बा ११५५ गज़ चौड़ा है क्षेत्रफल एकड़ में लाओ और उन भागों का भी क्षेत्रफल निकालो जिसमें एक भुज के मध्य बिन्दु से सामने के कोन तक खींची हुई सरल रेखा से यह खेत भाग हो जाता है ॥

८९—एक कमरा अपनी लम्बाई का दो तिहाई और अपने उंचाई का ड्योढ़ा चौड़ा है और चारों दीवारों का क्षेत्रफल १९२० वर्गफीट है तो कमरे का विस्तार बताओ ॥

९०—किसी त्रिभुज के भुज क्रम से २९,३५ और ४८ फ़ीट हैं तो उन दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालो जिनमें सब से बड़े भुज पर सामने के कोन के लम्ब से वह भाग होता है ॥

९१—एक कमरे की दीवारों में दो फ़ीट चौड़ा १६० गज़ कागज़ लगता है कमरा की उंचाई १० फ़ीट और लम्बाई चौड़ाई की दूनी है तो बताओ कि उसमें $\frac{3}{4}$ गज़ चौड़ी दरी की कितनी आवश्यकता होगी ॥

९२—अगर किसी वर्ग का प्रत्येक भुज ८ फ़ीट बढ़ा दिया जाय तो इस नए वर्ग का क्षेत्रफल पहिले वर्ग के क्षेत्रफल से २५६ वर्ग फ़ीट ज्यादा होता है, दूसरे वर्ग की भुज निकालो ॥

९३—एक आयताकार फूलों का बाग़ २३१ फ़ीट लम्बा और १६० फ़ीट चौड़ा है, इसके छोटे भुजों के पास ४ फ़ीट चौड़ा रास्ता वो बड़े भुजों के पास ४$\frac{1}{2}$ फ़ीट चौड़ा रास्ता और इसके बीच में एक दूसरे को काटता हुआ दोनों तरफ़ से ५ फ़ीट चौड़ा रास्ता बना हुआ है तो बताओ कि किस क़दर ज़मीन इसमें खेती के वास्ते बाक़ी है ॥

९४—एक त्रिभुज के भुज १२६४, १३४६ और १४३२ कड़ी हैं तो क्षेत्रफल एकड़ रोड पोल में लाओ ॥

९५—एक आयत का कर्ण जिसकी चौड़ाई १०० फ़ीट है १२५२ फ़ीट है तो बराबर क्षेत्रफल के वर्ग की भुज बताओ ॥

९६—एक कमरे की लम्बाई चौड़ाई से दूनी है भीतरी छत के सफ़ेदी का ख़र्च फ़ी वर्ग गज़ ९ आने के हिसाब से १० रु० २ आना है और दीवारों के रंगने का ख़र्च, उनके क्षेत्रफल का छठवां भाग द्वार इत्यादि के कारण निकाल डालने पर, फ़ी वर्ग फ़ुट ५ आने के हिसाब से १४० रु० १० आना है; दीवार की उंचाई क्या है ॥

९७—एक त्रिभुज को दो भुज २८ फ़ीट और ६५ फ़ीट हैं और उनका अन्तर्गत कोन १२०°, क्षेत्रफल बताओ ॥

९८—एक त्रिभुज की भुजाएं १२५ गज़ और ७५ गज़ हैं और उनका अन्तर्गत कोन १५०° है, क्षेत्रफल बताओ (युक्ति ५० लगाओ) ॥

९९—एक त्रिभुज के दो कोन ३०° और ६०° और दोनों का आसन्न भुज १०० फ़ीट है, क्षेत्रफल बताओ ॥

१००—एक अधिक कोन त्रिभुज के दो भुज जो अधिक कोन बनाते हैं क्रम से ११ और २५ गज़ हैं और क्षेत्रफल १३२ वर्ग गज़ है तीसरा भुज निकालो ॥

१०१—एक चतुर्भुज क्षेत्र के तीन सिलसिलेवार भुज क्रम से ५०, ५० और ४८ फ़ीट हैं, पहिले दो के दर्मियान का कोन ६०° है और सामने का कोन ९०° है, क्षेत्रफल निकालो ॥

१०२—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ६४० वर्ग फ़ीट है, एक कोन ३०° है और इस कोन को अन्तर्गत करनेवाले भुजों में से एक भुज ३२ फ़ीट है, दूसरी भुजों को दर्याफ्त करो ॥

१०३—एक चतुर्भुज क्षेत्र के कर्ण एक दूसरे पर समकोन बनाते हुए आपुस में काटते हैं और उनकी लम्बाई ८७ फ़ीट और २५ फ़ीट है, क्षेत्रफल बताओ ॥

१०४—किसी समानान्तर चतुर्भुज की भुजाएं ४० और ५० फ़ीट हैं और उनसे बना हुआ कोन ६०° है, क्षेत्रफल और कर्णों को निकालो ॥

१०५—इलाहाबाद में अशोक के खम्भे की उंचाई से और उसके आधार से २९५ इञ्च दूरी के किसी स्थान से बना हुआ कोन ६०° है तो खंभे की उंचाई निकालो ॥

१०६—अगर किसी त्रभुज के भुज १७,२४,२९ हों तो सब से छोटे भुज के मध्य विन्दु से सामने के कोन तक की दूरी बताओ ॥

१०७—अगर किसी समकोन त्रिभुज के समकोन बनाने वाली भुजाएं १३·५ और ६० हों और समकोन से कर्ण पर लंब डाला जाय तो उन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बताओ जिनमें कुल त्रिभुज लंब से बांटा जाता है ॥

१०८—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल दो एकड़ है, उसका आधार ५०० कड़ी और एक भुज १००० कड़ी है, दूसरा भुज बताओ ॥

१०९—कोई एक विषम सतभुज क्षेत्र है, सिद्ध करो कि इसको बराबर क्षेत्रफल के त्रिभुज में कैसे ला सकते हैं ॥

११०—१२′ × ८′ आयत में से उसके $\frac{1}{3}$ क्षेत्रफल का एक ऐसा समलंब काट कर निकाला गया है कि उसके दो समानान्तर भुजों में ३ : ४ का संबन्ध है। दोनों समानान्तर भुजों की लंबाई बताओ ॥

१११—दो सरल रेखा एक दूसरे को काटती हुई एक नहर से मिलकर क्रम से ३०° और ६०° के कोन बनाती हैं अगर उन के काटने के स्थान से नहर तक की दूरी बड़ी सड़क से ३ मील हो तो छोटी सड़क से क्या होगी; अगर एक पगडंडी उन सड़कों के मिलने के बिन्दु से नहर तक छोटी से छोटी बनाई जाय तो उस रास्ता से क्या फ़ासिला होगा ॥

११२—एक मनुष्य एक मीनार के उंचाई का कोन देखता है कि ३०° है और ६० फ़ीट नज़दीक आने पर उंचाई का कोन उस को ६०° मालूम होता है तो मीनार की उंचाई बताओ ॥

११३—एक चतुर्भुज क्षेत्र की तीन भुजाएं प्रत्येक १२० गज़ और चौथी १६० गज़ है यदि सब से बड़ी भुज का एक आसन्न कोन समकोन हो तो क्षेत्रफल एकड़ में बताओ (कलकत्ता युनिवर्सिटी) ॥

११४—एक त्रिभुज की भुजाएं ५०, ७८, ८० हों तो क्षेत्रफल और तीनों लम्बों की लंबाई जो कोन के बिन्दुओं से सन्मुख के भुजों पर डाले जाते हैं दर्याफ्त करो ॥

११५—एक पहाड़ी के आधार तक एक सीधी सड़क गई है। उस सड़क पर के दो मील के पत्थरों से, जो लगातार गड़े हैं, पहाड़ी की चोटी तक क्रम से ३०° और ४५° के दो कोन बनते हैं। पहाड़ी की उंचाई बताओ॥

११६—अ ब स द इ फ षट्भुज क्षेत्र है ब क, स ल, इ म और फ न, अ द पर लंब हैं, यदि ब क = ३ फ़ीट, स ल = ४फ़ीट, इ म = ४ गज़, फ न = ५·१ फ़ुट, अ क = ८ फ़ीट क ल = ५ गज़, ल द = ६० इञ्च, अ न = १४ फ़ीट, न म = १२ फ़ीट है; इस क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग फ़ीट में लाओ॥

११७—अ ब स द एक चतुर्भुज क्षेत्र है जिसका क्षेत्रफल ८५७५ वर्ग गज़ है, कोन ब समकोन है, और ब ल, अ स पर लंब है, अ ल = ९० गज़, स ल = ४० गज़, क्षेत्रफल स अ द निकालो॥

प यदि स द का मध्य विन्दु हो और प उ, स अ के समानान्तर हो तो प उ, की लंबाई निकालो (कलकत्ता युनिवर्सिटी)॥

११८—एक त्रिभुज की दो भुजाएं क्रम से ९ और १२ फ़ीट हैं और उनसे बना हुआ कोन दूसरे दो कोनों के योग के बराबर है, तीसरीभुज और क्षेत्रफल बताओ (कलकत्ता युनिवर्सिटी)॥

११९—वह क्रमिक बहुभुज क्षेत्र बताओ जिसका एक कोन दो समकोणों का ९/१० हो (कलकत्ता युनिवर्सिटी)॥

१२०—एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएं क्रम से १७५ गज़, २०० गज़, और २५० गज़ हैं; एकड़ रोड और पोल में क्षेत्रफल लाओ (कलकत्ता युनिवर्सिटी)॥

१२१—एक सड़क को १५ प्रत्यक्ष मील मापने के पीछे एक आदमी को मालूम हुआ कि उसकी जरीब दो इञ्च अधिक लंबी है तो बताओ कि माप में क्या भूल हुई और उस वर्ग के मापने में भूल क्या होगी जो १२ एकड़ २ रोड देखने में है॥

(कलकत्ता युनिवर्सिटी)

१२२—एक मनुष्य अ स्थान से दूसरे स्थान व तक सीधा नहीं जा सकता परन्तु नीचे के प्रकार से जा सकता है। पहिले १०० फ़ीट ठीक पूर्व को जाता है तब १२० फ़ीट उत्तर और पूर्व के कोन उसके बाद १५० फ़ीट उत्तर और पश्चिम के कोन जाता है और अन्त में ६० फ़ीट दक्खिन और पश्चिम के कोन की ओर जा कर व स्थान पर पहुंच जाता है, अ और व का फ़ासिला बताओ॥

(कलकत्ता युनिवर्सिटी)

१२३—एक चतुर्भुज क्षेत्र अ व स द के भुज अ व, व स, और स द क्रम से १०, १५, १६, हैं और कोन अ व स और व स द क्रम से १३५° और ९०° हैं। अ द की लंबाई एक स्थान दशमलव तक लाओ॥ (कलकत्ता युनिवर्सिटी)

१२४—एक समलंब की दो समानान्तर भुज १२ और ६ और दूसरी दो ७ और ८ हैं, कर्णों की लंबाई बताओ॥

(कलकत्ता युनिवर्सिटी)

१२५—अगर एक समतल क्षेत्र अनगिनती बराबर कोन और बराबर भुज वाले ऋजुभुज क्षेत्रों से बनती हो तो यह साबित करो कि यह सब क्षेत्र त्रिभुज, वर्ग या षटभुज ही हो सकते हैं॥

१२६—साबित करो कि तमाम बराबर कोनों और समभुजों वाले क्षेत्रों में से जो किसी सम धरातल को पूरा पूरा ढक लेते हैं सिर्फ़ षटभुज क्षेत्र ही, जिसका कि परिमिति मालूम है, सब से ज्यादह क्षेत्रफल घेरती है॥

दूसरा भाग

—:o:—

[इस भाग में मापविद्या के उन्हीं नियमों का वर्णन है जिन के लिये रेखागणित के प्रथम चार अध्यायों का ज्ञान अवश्य कर के होना चाहिए]

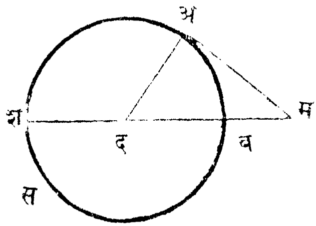
पहिला प्रकरण

वृत्त की स्पर्श रेखा व चापकर्ण या जीवा ॥

६०—स्पर्श रेखा की लम्बाई—

कल्पना करो कि अ व स वृत्त पर जिसका केन्द्र द है बिन्दु म से म अ स्पर्श रेखा खींची गई है ॥

शकल २९



अ द को मिलादो

अब चूंकि कोण द अ म समकोण है (रे० ग० ३. १९)

इसलिये म अ^{२} = म द^{२}—द अ^{२}

= (म द + द अ) (म द—द अ)

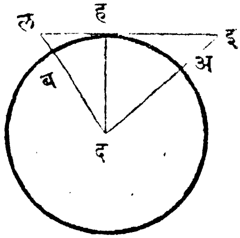
नियम—यदि किसी बिन्दु से किसी वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जावे तो उस रेखा की लम्बाई उस गुणनफल के बर्गमूल के समान होती है जो व्यासार्ध (त्रिज्या) और उस बिन्दु से केन्द्र की दूरी के योग व अन्तर के गुणा करने से मिलता है ।

६१—भुमिक्र दिगमण्डल (क्षितिज)

पृथ्वी अनक़रीब एक गोला है जिसका अर्ध व्यास ४००० मील है ॥

अगर ल उंचाई से (जो सतह ज़मीन से न फ़ीट ऊंचा है) बहुत सी स्पर्श रेखाएं ल ह के सदृश खींची जावें तो वे ज़मीन को एक वृत्त में छूवेंगी जिसको भुमिक दिगमंडल कहते हैं ॥

शकल ३०



६२—समुद्र पर से क्षितिज का अन्तर

शकल ३० में मानलो कि ल ब = न फ़ीट = $\frac{न}{५२८०}$ मील

$\therefore$ ल द = $\left(४००० + \frac{न}{५२८०} \right)$ मील

अब ल ह^२ = ल द^२ − ह द^२ = (ल द + ह द) (ल द − ह द)

$$= \left(४००० + \frac{न}{५२८०} + ४०००\right)\left(४००० + \frac{न}{५२८०} - ४०००\right)$$

$$= \left(८००० + \frac{न}{५२८०}\right)\frac{न}{५२८०}$$

$$= \frac{८००० \times न}{५२८०} + \left(\frac{न}{५२८०}\right)^२$$

$$= \frac{८०० \times न}{५२८} \text{ लग भग}$$

$\left\{ \text{चूंकि } \left(\frac{न}{५२८०}\right)^२ \text{ की उपमा } \frac{८०० \times न}{५२८} \text{ से बहुतही कम है} \right\}$

$$= \frac{(३ \times २६४ + ८)न}{२ \times २६४}$$

$$= \frac{३न}{२} + \frac{८\ न}{२ \times २६४}$$

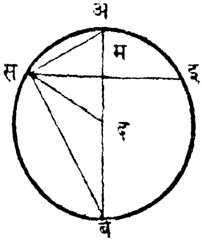
इस लिये लह $= \frac{\sqrt{३न}}{\sqrt{२}}$ मील अनक़रीब (इस कारण से कि $\frac{८ न}{२ \times २६४}$ को उपमा $\frac{३न}{२}$ से बहुत ही कम है) ॥

नियम—समुद्र की क्षितिज का अन्तर न फ़ीट की उंचाई से $= \frac{\sqrt{३न}}{\sqrt{२}}$ मील ॥

निरूपण—शकल ३० में मानलो कि वल और अइ दो जहाज़ के मस्तूल हैं और वे न फ़ुट और ण फ़ुट क्रम से ऊंचे हैं, और उन पर से दो आदमी एक दूसरे की ओर देख रहे हैं, तो उनके बीच की दूरी लइ $= (\frac{\sqrt{३न}}{\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{३ण}}{\sqrt{२}})$ मील के ॥

६३—कल्पना करो कि सइ वृत्त असवइ की जीवा है और द कैन्द्र है, सइ पर केन्द्र द से दम लम्ब खींचो और दम को दोनो ओर बढ़ाओ कि वह परिधि से अ और ब विन्दुओं पर मिल जावे। सअ, सद और सब को मिलाओ ॥

सकल ३१



यह साफ़ मालूम होता है कि जीवा सइ का म बिन्दु पर दो बराबर भाग होता है (रे० ग० ३-३)
और बिन्दु अ चाप सअइ का मध्य बिन्दु है और कोण असब समकोण है (रेखाग० ३-३१)

परिभाषा—सइ चाप सअइ की जीवा कहलाती है और अम उसका शर या उंचाई और सअ अर्धचाप की जीवा ॥

६४—शकल ३१ में अगर हम त्रिभुज समब के चारों ओर वृत्त बनावें तो अस इस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी क्योंकि असब समकोण है (रेखाग० ३-१९)

इसलिये $स अ^{२} = अ म \times अ ब$ (रेखाग० ३-३६)।
फिर रेखागणित ३-३५ के अनुसार
सतह $अ म \times म ब = स म \times म इ = स म^{२}$
यह दोनों नतीजे अर्थात्

$$स\ अ^{२} = अ\ म \times अ\ ब \qquad (१)$$

$$और\ स\ म^{२} = अ\ म \times म\ ब \qquad (२)$$

वृत्त की जीवाओं के प्रश्नों के व्याख्या करने में बहुत ही लाभ देने वाले हैं॥

(युक्ति ५४ में उनके निकालने का नियम दूसरी रीति से दिया गया है)॥

६५—चाप स अ इ का शर अ म और अर्ध चाप की जीवा स अ दिया हो तो व्यास अ ब मालूम हो सकता है॥

चूंकि $अ म \times अ ब = स अ^{२}$ (१)

$$\therefore अ\ ब = \frac{स\ अ^{२}}{अ\ म}$$

६६—चाप स अ इ का शर अ म और व्यास अ ब ज्ञात है, अर्ध चाप की जीवा बता सकते हैं॥

चूंकि $अ म \times अ ब = स अ^{२}$ (१)

$$\therefore स\ अ = \sqrt{अ\ म \times अ\ ब}$$

६७—अगर व्यास अ ब और अर्ध चाप की जीवा स अ मालूम हो तो चाप का शर अ म दर्याफ्त कर सकते हैं॥

चूंकि $अ म \times अ ब = स अ^{२}$ (१)

$$\therefore अ\ म = \frac{स\ अ^{२}}{अ\ ब}$$

६८—चाप स अ इ की जीवा स इ और उसका शर अ म दिए हुए हैं तो व्यास अ ब निकाल सकते हैं॥

चूंकि $स म = \frac{१}{२} स इ$
और $स म^{२} = अ म \times म ब$ (२)

$\therefore$ म ब $= \frac{\text{स म}^2}{\text{अ म}}$ $\therefore$ म ब मालूम हो गया और

अ ब = अ म + म ब ॥

६९—स अ इ चाप का शर अ म और व्यास अ ब मालूम हो तो चाप की जीवा स इ बताओ ॥

स अ^2 = अ म × अ ब, इसलिये स अ मालूम हो गया और स म^2 = स अ^2 − अ म^2, जिस से स म दर्याफ्त हो गया, और स इ = २ × स म ॥

७०—स इ चाप स अ इ की जीवा और अ ब व्यास यदि मालूम हों तो चाप का शर अ म बताओ ॥

स म = ½ स इ और स द = ½ स ब

और म द^2 = स द^2 − स म^2

जिससे म द जाना गया है

और अ म = अ द — म द = ½ अ ब — म द

७१—चाप स अ इ की जीवा स इ और व्यास अ ब अगर दिए हुए हों तो बताओ की अर्ध चाप की जीवा स अ क्या होगी ॥

स म = ½ स इ, स द = ½ अ ब और म द^2 = स द^2 — स म^2, जिससे स म निकल सकता है ॥

फिर अ म = अ द — म द और स अ^2 = अ म^2 + स म^2, जिससे स अ बता सकते हैं ॥

७२—नियम

यदि २ ज = कुल चाप की जीवा

ज = अर्ध चाप की जीवा

श = चाप का शर

व = वृत्त का व्यास

तेा

$$ज = \sqrt{ज^2 + श^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$ब = \frac{ज^2}{श} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$ज = \sqrt{शब} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

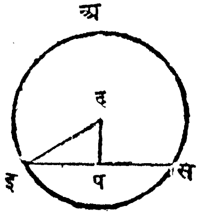
$$श = \frac{ज^2}{ब} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$ब = \frac{ज^2}{श} + श = \frac{ज^2 + श^2}{श} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

७३—केन्द्र से जीवा की दूरी--

कल्पना करेा कि स इ पर केन्द्र द से द प लम्ब है तेा स प = प इ (रेखाग० ३-३)। अब $दप^2 = सद^2 — सप^2$ = (स द + स प) (स द—स प), इसलिये द प मालूम हेा गया ॥

शकल ३२



नियम—एक वृत्त की जीवा क मान लेा और उसके अर्ध व्यास को अ मान लेा, उस वृत्त के जीवा क से केन्द्र की दूरी

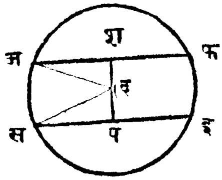
$$= \sqrt{\left(अ^2 — \frac{क^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(अ + \frac{क}{2}\right)\left(अ — \frac{क}{2}\right)}$$

निरूपण—एक ही वृत्त में एक ही लम्बाई के अनगिनती चाप जीवा खींची जा सकती हैं, परन्तु एक ही वृत्त में एक ही लम्बाई के समानान्तर जीवा देा से अधिक नहीं खींची जा सकतीं। चाप जीवा की लम्बाई व्यास की लम्बाई से ज़रूर कम होनी चाहिए ॥

७४—दो हुई लम्बाई के समानान्तर जीवाओं के बीच का अन्तर—

मानलो कि जीवाएं स इ और ज फ की लम्बाई क और क′ हैं और अर्ध व्यास अ है ॥

शकल ३३



पहिले मान लो कि जीवाएं केन्द्र के दोनों ओर हैं ॥

स इ और ज फ पर क्रम से द प और द श लम्ब हैं तो श द और द प एक ही सीधी रेखा में हैं ॥

$$\text{अब द प} = \sqrt{\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क}}{2}\right)^2} \text{ और द श} = \sqrt{\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क}'}{2}\right)^2}$$

$$\text{इसलिये श प} = \sqrt{\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क}}{2}\right)^2} + \sqrt{\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क}'}{2}\right)^2}$$

दूसरे जब कि जीवाएं केन्द्र के एक ही ओर हैं तो यह ज़ाहिर है कि द प और द श के योग के स्थान में उन का अन्तर लेना चाहिए ॥

७५—दो वृत्तों की सम्बन्धी दशा में हमको नीचे लिखे हुए उपपाद्य रेखागणित ३·११ और १२ के साध्य से हासिल होते हैं ॥

दो वृत्त (१) बिलकुल एक दूसरे से बाहर होंगे जब कि उन के केन्द्रों की दरमियान की दूरी उनके अर्ध व्यासों के योग से ज़ियादः होती है; (२) बाहरी ओर छुवेंगे जब कि उनके केन्द्रों के बीच की दूरी उनके अर्ध व्यासों के योग के बराबर होती है; (३) दो विन्दुओं में परस्पर कटेंगे जब कि उनके केन्द्रों के मध्य का अन्तर उनके अर्ध व्यासों के जोड़ से कम और शेष से अधिक होता है; (४) भीतरी ओर स्पर्श करेंगे जब कि उनके केन्द्रों की दूरी उनके अर्ध व्यासों के शेष के बराबर होती है; या (५) एक समूचा दूसरे के अंदर होगा जब कि उनके केन्द्रों की दूरी उनके अर्ध व्यासों के फ़र्क़ से कम होती है ॥

७६—यदि दो वृत्त के केन्द्रों के मध्य के अन्तर पर का वर्ग उनके अर्ध व्यासों पर के वर्ग योग के बराबर हों तो दोनों वृत्त परस्पर समकोण पर काटेंगे ॥

७७—उस वृत्त का अर्ध व्यास निकालना है जिसकी समानान्तर जीवा (२ क और २ क′) और उनके दरमियान की लम्बरूप दूरी (ब) दी हुई है ॥

शकल ३३ में क श = क, स प = क′, ज द = अ, श प = ब,

मानलो कि द प = ग, द श = ल,

तो $ल^2 = अ^2 - क^2$

$ग^2 = अ^2 - क'$

$\therefore ल^2 - ग^2 = क'^2 - क^2$

लेकिन $ल + ग = ब$ (१)

$$\therefore ल - ग = \frac{क'^2 - क^2}{ब} \qquad (२)$$

$$(१) \text{ और } (२) \text{ से } ल = \tfrac{1}{2}\left(ब + \frac{क'^2 - क^2}{ब}\right)$$

$$\therefore अ^2 = क^2 + \tfrac{1}{4}\left(ब + \frac{क'^2 - क^2}{ब}\right)^2$$

$$= क^2 + \tfrac{1}{4} ब^2 + \tfrac{1}{2}\left(क'^2 - क^2\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{क'^2 - क^2}{ब}\right)^2$$

उदाहरण—फ़र्ज़ करो कि स इ = ६, ज फ = ८, और श प = ७ फ़ीट, तो अ दर्याफ्त करो ॥

इस उदाहरण में $(श द)^2 = अ^2 - ९$

$(द प)^2 = अ^2 - १६$

$\therefore श द^2 - द प^2 = ७$

लेकिन श द + द प = ७

$\therefore$ श द — द प = १

और श द = ४, द प = ३

इसलिये $अ = \sqrt{३^2 + ४^2} = ५$ फ़ीट

निरूपण—वह दशा जिसमें जीवा केन्द्र के एक ही ओर हैं विद्यार्थी के अभ्यास के लिये छोड़ दी गई है ॥

पन्द्रहवां अभ्यास

१—रेखाग० १-१ में सिद्ध करो कि उभयनिष्ठ चाप जीवा की लंबाई अ$\sqrt{3}$ होती है ॥

२—एक वृत्त का अर्ध व्यास १५ है तो उस चाप का शर बताओ जिसकी जीवा १८ है ॥

३—चाप जीवा २० फ़ीट और उंचाई ४ फ़ीट है तो व्यास क्या होगा ?

४—माप से एक चाप की उंचाई ७ फ़ीट ९$\frac{1}{2}$ इंच और अर्ध चाप की जीवा १५ फ़ीट ७ इ० पाई गई तो बताओ कि इस चाप के वृत्त का व्यासार्ध क्या है ॥

५—एक पुल का फैलाव (जीवा) जिसका आकार वृत्त के चाप की तरह है ४८ फ़ीट है और उंचाई १० फ़ीट तो अर्ध व्यास दरयाफ्त करो ॥

६—एक वृत्त के चाप की जीवा १०० फ़ीट और अर्ध चाप की जीवा ६० फ़ीट है, व्यासार्ध बताओ ॥

७—एक चाप की जीवा ८ गज़ और अर्ध चाप की जीवा १५ फ़ीट हो तो बताओ कि व्यास क्या होगा ॥ (कलकत्ता यूनीवर्सिटी)

८—एक मनुष्य किसी जहाज़ के पटरी पर, जो पानी की सतह से २० फ़ीट ऊपर है, खड़ा होकर एक मीनार की रोशनी ठीक क्षितिज पर देख सकता है; अगर वह रोशनी समुद्र की सतह से १२० फ़ीट ऊंची हो तो बताओ कि वह मनुष्य मीनार से कितने फ़ासले पर खड़ा है ॥ (पृथ्वी का अर्ध व्यास = ४००० मील) ॥ (कलकत्ता यूनीवर्सिटी)

९—अ ब और अ स एक वृत्तके चाप की जीवाएं परस्पर समकेाण बनाती हैं। यदि उनकी लंबाई क्रम से ३० और ४० फ़ीट हों तो चाप अ स का शर और वृत्त का व्यास निकालो ॥

(कलकत्ता यूनीवर्सिटी)

१०—एक चाप की जीवा ९६ फ़ीट है और वृत्त का व्यास १०० फ़ीट है तो अर्ध चाप की उंचाई दर्याफ्त करो ॥ (कलकत्ता यूनी०)

११—दो वृत्त जिनके व्यासार्ध क्रम से २०५ और ३०.४ इञ्च हैं, एक के पास दूसरे इस तरह रखे जाते हैं कि उनके केन्द्रों का फ़ासला १० इ०, ५१ इ०, ९ इ०, ५० इ०, ९.९ इ० होता है; बताओ कि पृथक पृथक दशा में उनका सम्बन्ध आपस में क्या होगा ?

१२—मान लो कि रुडकी के कारखाने में धुवां निकलने का स्थान ११० फ़ीट ऊंचा है और पृथ्वी का व्यास ७९६० मील है तो दूर से दूर कितने फ़ासले से वह स्थान दिखलाई देगा ?

१३—एक वृत्त की दो समानान्तर जीवा क्रम से ६० और ८० फ़ीट हैं और उनके मध्य का अन्तर १० फ़ीट है, व्यासार्ध बताओ ॥

१४—चाप जीवा ३६ फ़ीट और उसकी उंचाई १८ फ़ीट है, व्यास क्या है ?

१५—फ़र्ज़ करो कि ज़मीन गोलाकार है जिसका व्यास ८००० मील है और सहारनपूर से आगरे तक का फ़ासला अनक़रीब २०० मील के है, तो बताओ कि इन दोनों जगहों में से एक पर कोई आदमी किस क़दर सीधे चढ़े कि वह दूसरी जगह को देख सके ?

१६—वृत्त जिनके व्यसार्ध १६.६ व १३.४ इञ्च हैं, इस प्रकार से रक्खे जाते है कि उनके केन्द्र (१) ४, (२) ३०, (३) ३२, (४) ३, (५) ३$\frac{१}{६}$ इञ्च न्यारे हैं तो प्रत्येक सूरत में वृत्तों की सम्बन्धी दशा बताओ ॥

१७—एक वृत्त की चाप जीवा १० फ़ीट और अर्ध चाप जीवा ६ फ़ीट हैं, वृत्त का अर्ध व्यास और चाप का शर मालूम करो ॥

१८—एक चाप की जीवा ४५ और अर्ध चाप की जीवा २५·५ है, व्यास बताओ ॥

१९—दो वृत्तों की, जो परस्पर काटते है, उभयनिष्ठ जीवा ८० फ़ीट है और उसके सामने का कोण एक वृत्त के केन्द्र पर ६० अंश का है और दूसरे वृत्त के केन्द्र पर १२० अंश का है तो बताओ कि प्रत्येक वृत्त का व्यासार्ध और उनके केन्द्रों का अन्तर क्या है ?

२०—सम्पूर्ण चाप की जीवा १२० फ़ीट और उसका शर (उंचाई) ११ फ़ीट है तो व्यास और अर्धचाप की जीवा क्या होगी ?

२१—एक वृत्त का व्यास २०० फ़ीट लम्बा है और वह ८ बराबर भागों में काटा गया है और भाग बिन्दुओं से जाती हुई समानान्तर जीवाएं व्यास के साथ समकोण बनाती हुई खींची गई हैं तो इन जीवाओं की लम्बाई निकालो ॥

दूसरा प्रकरण

वृत्त जो त्रिभुज की भुजाओं के भीतरी ओर छूता हुआ खींचा जाय (इन-सरकिल), व वृत्त जो त्रिभुज के भुजाओं के चारों ओर अर्थात् तीनों कोण बिन्दुओं से मिलता हुआ बनाया जाय (सरकम-सरकिल), व वृत्त जो त्रिभुज की एक भुज को और दूसरे दो भुजों के बढ़े हुए हिस्से को स्पर्श करता हुआ बनाया जाय (एक्स् सरकिल) ॥

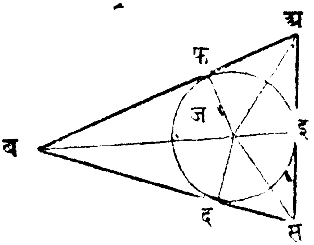
७८---भीतरी ओर वृत्त का व्यासार्ध-

कल्पना करो कि अ ब स त्रिभुज है और इ ज फ वृत्त त्रिभुज

के भीतर बनाया गया है क्ष व्यासार्ध और द केन्द्र है और इ ज फ स्पर्श के बिन्दु हैं ॥

तब त्रिभुज व द स का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ व स × द इ $= \frac{1}{2}$ अ क्ष, त्रिभुज स द अ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ स अ × द ज $= \frac{1}{2}$ ब क्ष, त्रिभुज अ द ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ अ ब × द फ $= \frac{1}{2}$ स क्ष।

शकल ३४



इसलिये इसके जोड़ने से सारे त्रिभुज

अ ब स का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ अ क्ष $+ \frac{1}{2}$ ब क्ष $+ \frac{1}{2}$ स क्ष

$= \frac{1}{2}$ (अ + ब + स) क्ष

= *श क्ष

इसलिये क्ष $= \frac{\text{क्षेत्रफल अ ब स}}{\text{श}} = \frac{\Delta}{\text{श}}$

(चिन्ह △ के प्रयोग से अ ब स का क्षेत्रफल समझा जायगा)

अनुमान △ के ठौर उसके बराबर का अंक रखने से

$$\text{क्ष} = \frac{\sqrt{\text{श}(\text{श}-\text{अ})(\text{श}-\text{ब})(\text{श}-\text{स})}}{\text{श}} = \sqrt{\frac{(\text{श}-\text{अ})(\text{श}-\text{ब})(\text{श}-\text{स})}{\text{श}}}$$

७६—भुजों के खण्ड जो भीतरी वृत्त के स्पर्श बिन्दुओं से होते हैं॥

शकल ३४ में ब इ = ब फ, स इ = स ज, अज = अ फ और २ श = (ब इ + ब फ) + (स इ + स ज) + (अ ज + अ फ)

---

* श $= \frac{1}{2}$ परिमित (युक्ति ७९ देखो)

∴ ब इ + स इ + अ ज = अर्धपरिमित (भुजों का योग)
= श

अथवा अ + अ ज = श

इस लिये   अ ज = अ फ = श — अ

इसी प्रकार से ब इ = ब फ = श — ब

स इ = स ज = श — स

नियम—प्रत्येक खण्ड जो अ के निकट है = श — अ, जो ब के निकट है = श — ब, और जो स के निकट है = श — स

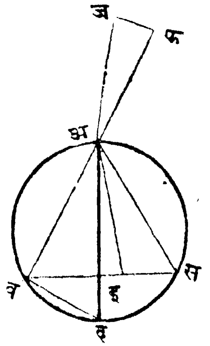
जब कि अ समकोण है तो द ज = अ ज ∴ क्ष = श — अ

८०—वृत्त जो त्रिभुज के चारों ओर बनाया जाय—

कल्पना करो कि वृत्त अ ब स त्रिभुज अ ब स के चारों ओर बनाया गया है और बिन्दु अ से अ द व्यास खींचा गया है ॥

ब स पर बिन्दु अ से अ इ लम्ब खींचो और ब अ को बिन्दु फ तक अ फ को अ स के बराबर बनाते हुए और द अ को बिन्दु ज तक अ ज को अ द के बराबर बनाते हुए बढ़ाओ, ज फ और ब द को मिलादो ॥

शकल ३५



अब अ ब द और अ इ स त्रिभुजों में कोण अ ब द और अ इ स समान हैं, क्योंकि हर एक समकोण है, और कोण अ द ब और अ स इ एक ही वृत्त खंड में होने से बराबर हैं;

इसलिये तीसरे कोण ब अ द और इ अ स भी बराबर हैं। लेकिन ब अ द = फ अ ज (रेखा ग० १-१५)

इसलिये फ अ ज = स अ इ

तब फ अ ज और स अ इ त्रिभुज में ज अ

= अ इ, अ फ = अ स और ज अ फ = स अ इ

∴ कोण फ ज अ = स इ अ (रेखा ग० १-४)

= एक समकोण; इसलिये फ ज अ = अ ब द।

इसलिये बिन्दु फ, ज, ब, द एक वृत्तके परिधि में हैं (रेखा ग० ३-२२)॥

इसलिये सतह ब अ × अ फ = सतह द अ × अ ज, या

ब अ × अ स = द अ × अ इ

∴ ब अ × अ स × ब स = द अ × अ इ × ब स;

परन्तु अ इ × ब स = २ × क्षेत्रफल त्रिभुज अ ब स

∴ अगर ब स, स अ और अ ब के स्थान में क्रम से अ, ब और स रखे जावें और व्यास द अ के बदले में २ र और त्रिभुज अ ब स के क्षेत्रफल के बदले में △ मान लिया जावे, तो

अ ब स = २ र × २△

$$\text{इसलिये } र = \frac{\text{अ ब स}}{४\triangle}$$

नियम---त्रिभुज पर के वृत्त का व्यासार्ध

$$= \frac{\text{अ ब स}}{४\triangle} \text{ और व्यास} = \frac{\text{अ ब स}}{२\triangle}$$

$$\text{जब कि कोण अ समकोण है तो } र = \frac{\text{अ}}{२}$$

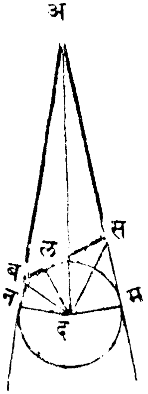
निरूपण—रेखागणित के छठवें खण्ड के साध्य से ऊपर का फल सहलता से पाया जा सकता है॥

८१—त्रिभुज के एक भुजको स्पर्श करता हुआ वृत्त—

परिभाषा—जो वृत्त किसी त्रिभुज के एक भुज को छूता है

और शेष दो भुजों को बढ़ाने पर छूता है उसको उस त्रिभुज का स्पर्श वृत्त कहते हैं।

शकल ३६



कल्पना करो कि अ ब स एक त्रिभुज है और ल म न वृत्त है जो ब स और बढ़े हुए अ ब, अ स को छूता है

मानलो कि $र_{अ}$ वृत्तका अर्ध व्यास है और द केन्द्र और ल म न स्पर्श बिन्दु हैं।

तब क्षेत्रफल त्रिभुज ब द स

$$= \frac{1}{2} ब स \times द ल = \frac{1}{2} अ \times र_{अ}$$

$$,, \quad स द अ = \frac{1}{2} स अ \times द म = \frac{1}{2} ब \times र_{अ}$$

$$,, \quad अ द ब = \frac{1}{2} ब अ \times द न = \frac{1}{2} स \times र_{अ}$$

इसलिये पिछले दो के योग में से पहिले को घटाने से त्रिभुज अ ब स का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} ब र_{अ} + \frac{1}{2} स र_{अ} - \frac{1}{2} अ र_{अ}$

$$= \frac{1}{2} (ब + स - अ) र_{अ}$$

$$= (श - अ) र_{अ} \qquad \text{(युक्ति ३०)}$$

इसलिये $र_{अ} = \frac{\text{क्षेत्रफल अ ब स}}{श - अ} = \frac{\triangle}{श - अ}$

उसी तौर से $र_{ब}$ (व्यासार्ध उस बहिःवृत्त का जो भुज अ स अथवा ब को छूता है) $= \frac{\triangle}{श - ब}$

और $र_{स}$ (व्यासार्ध उस बहिःवृत्त का जो भुज अ ब अथवा स को छूता है) $= \frac{\triangle}{श - स}$

८२—शकल में ३६ अ म = अ न, ब ल = ब न, स ल = स म;

इसलिये अ म + अ न = अ स + स ल + ल व + व अ

= २ श

अ म = अ न = श

व ल = अ न — अ व = श — स

स ल = अ म — अ स = श — व

सोलहवां अभ्यास

१—सातवें अभ्यास के १० त्रिभुजों में भीतरी और स्पर्श और भीतरी व बाहरी वृत्त के व्यासार्ध की लम्बाई बताओ ॥

२—उस वृत्त का व्यास निकालो जो एक त्रिभुज पर बना है जिसके भुज क्रम से ७०, २४०, २५० फ़ीट हैं ॥

३—एक त्रिभुज की भुजाएं क्रम से ८, ६, १० फ़ीट हैं: (१) उसका क्षेत्रफल, (२) बाहरी ओर वृत्त का व्यास, (३) उस चाप की उंचाई जो ८ फ़ीट की भुजा से कट कर बना है दरयाफ्त करो। (कलकत्ता यूनीवर्सिटी)

४—एक समत्रिबाहु त्रिभुज का भुज १०० फ़ीट है तो उस वृत्त का अर्ध व्यास बताओ जो उसके चारों ओर बनाया गया है।

५—एक त्रिभुज की भुजाएं २९३, २८५, ६८ हैं तो बाहरी वृत्त का व्यास निकालो ॥

६—१०, २४, २६ त्रिभुज के भुज हैं; इसके भीतरी वृत्त का अर्ध व्यास मालूम करो ॥

७—यदि ऐसे त्रिभुज में जिसके भुज १३, १४, १५ हैं, एक वृत्त बनाया जाय तो उसके केन्द्र से त्रिभुज के छोटे से छोटे न्यून कोण तक का अंतर बताओ ॥

८—अगर एक समद्विबाहु त्रिभुज की उंचाई आधार के बराबर हो तो साबित करो कि उस वृत्त का व्यासार्ध जो उस त्रिभुज के चारों ओर खींचा जावेगा आधार के $\frac{5}{8}$ भाग के बराबर होगा।

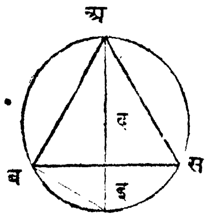
तीसरा प्रकरण

वृत्त के भीतरी और बाहरी समबहुभुज क्षेत्र

८३—भीतरी समत्रिबाहु त्रिभुज

फ़र्ज़ करो कि अ ब स समत्रिबाहु त्रिभुज है जो वृत्त के भीतर जिसका व्यासार्ध अ है बनाया गया है, भुज अ ब की लम्बाई निकालनी है ॥

शकल ३७



विन्दु अ से अ इ व्यास खींचो; ब इ को मिलाओ; अ इ समकोन पर दो समान हिस्सों में ब स को भाग करता है (रेखा ग० ३-३)

इस लिये कोन ब अ इ = ३० अंश

$$\text{और अ ब} = \frac{\sqrt{३}}{२} \times \text{अ इ} = \frac{\sqrt{३}}{२} \times २\text{अ} = \text{अ}\sqrt{३}$$

नियम—उस समत्रिबाहु त्रिभुज का भुज जो वृत्त के भीतर बनाया जाय = $\sqrt{३} \times$ वृत्त का अर्धव्यास ।

नियम—उस वृत्त का व्यासार्ध जो समत्रिबाहु त्रिभुज के चारों ओर बनाया जाय = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ त्रिभुज का भुज

$$\text{और क्षेत्रफल अ ब स का} = \frac{\sqrt{३}}{४} (\text{अ ब})^२ \quad (\text{युक्ति २९})$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{४} \times (\sqrt{३}\,\text{अ})^२$$

$$= \frac{३\sqrt{३}}{४} \text{अ}^२$$

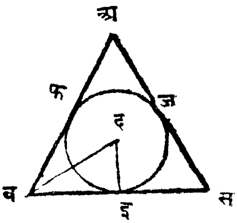
निरूपण—७८ और ८० युक्तियों से भी ऊपर के नतीजे निकाले जा सकते हैं।

८४—बाहरी समत्रिबाहुत्रिभुज—

कल्पना करो कि अ ब स समत्रिबाहु त्रिभुज वृत इ ज फ के बाहरी ओर बनाया गया है और वृत्त का अर्धव्यास अ है, अ ब को निकालना है।

मानलो कि शकल ३७ (अ) में द वृत्त का केन्द्र है, द इ और द ब मिला दो, तो कोन द इ ब समकोण है और द ब इ = ३० अंश

शकल ३७ (अ)



$\therefore$ ब इ = $\sqrt{३} \times$ द इ = $\sqrt{३} \times$ अ

इस लिये ब स = $२\sqrt{३} \times$ अ और

द इ = $\frac{\text{ब स}}{२\sqrt{३}}$

नियम—वृत्त के चारों ओर बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज का $२\sqrt{३} \times$ उस वृत्त का व्यासार्ध।

निरूपण—इस ढब से वृत्त पर बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज का भुज वृत्त के भीतर बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज के भुज का दूना होता है॥

और अ ब स का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{३}}{४} \times$ (ब स)^{२}

$= \frac{\sqrt{३}}{४}(२\ \text{अ}\sqrt{३})^{२} = ३\sqrt{३}\ \text{अ}^{२}$

इस प्रकार से ऊपर की शकल से प्रत्यक्ष है कि वृत्त पर का समत्रिबाहु त्रिभुज वृत्त के भीतर के समत्रिबाहु त्रिभुज का चौगुण होता है॥

८५—वृत्त के भीतरी बना हुआ वर्ग—

रेखाग० ४-९ से ज़ाहिर है कि वृत्त के भीतर बने हुए वर्ग का भुज $= \sqrt{२} \times$ व्यासार्ध ।

इस लिये व्यासार्ध वर्ग के बाहर बने हुए वृत्त का $= \frac{१}{\sqrt{२}} \times$ वर्ग का भुज ॥

८६—वृत्त के बाहर बना हुआ वर्ग—

रेखाग० ४-७ से प्रकाशित है कि वृत्त के बाहर बने हुए वर्ग का भुज $=$ **२** $\times$ व्यासार्ध ।

इस लिये वर्ग के भीतरी वृत्त का व्यासार्ध $= \frac{१}{२} \times$ वर्ग का भुज ॥

८७—वृत्त का भीतरी समषट्भुज—

रेखाग० ४-१५ से हमको मालूम होता है कि वृत्त के भीतर बने हुए सम षट्भुज का भुज $=$ वृत्त का व्यासार्ध ।

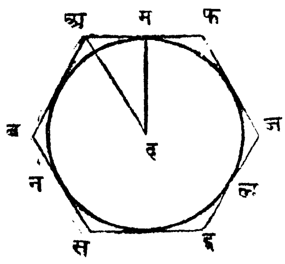
केन्द्र को कोन के बिन्दुओं से मिलाने पर षट्भुज क्षेत्र ६ समान समत्रिबाहु त्रिभुज में भाग हो जाता है ॥

इस लिये उसका क्षेत्रफल $= ६ \times (\text{भुज})^२ \times \frac{\sqrt{३}}{४} = \frac{३\sqrt{३}}{२} \times$ (व्यासार्ध $)^२$ ॥

८८—वृत्त का बाहरी समषट्भुज—

शकल ३७ (ब) में फ़र्ज़ करो कि अ ब स इ ज फ **सम षट्भुज है जो वृत्त** ल म न **के बाहर, जिसका केन्द्र** द **है, बनाया गया है।** अ द **और** म द **को मिलाओ। अब कोन**

शकल ३७ (ब)



ब अ फ $=$ **१२० अंश (युक्ति ४५)**

$\therefore$ **कोण** द अ म $=$ **६० अंश और**

अ म द $=$ **९० अंश**

$\therefore$ अ म $= \frac{१}{\sqrt{३}}$ म द

परन्तु अ फ $=$ **२** अ म

$\therefore$ अ फ $= \frac{२}{\sqrt{३}}$ म द $= \frac{२ \text{ अ}}{\sqrt{३}}$

नियम—वृत्त के बाहरी सम षटभुज का भुज

$$= \frac{२}{\surd ३} \text{ व्यासार्ध}$$

केन्द्र को षटभुज के कोण के बिन्दुओं से मिलाने पर षटभुज ६ समान त्रिभुज में भाग हो जाता है, इस लिये उसका क्षेत्रफल $= ६ \times$ क्षेत्रफल अ द फ $= ६ \times \frac{१}{२}$ अ फ $\times$ द म $= ३ \times \frac{२ \text{ अ}}{\surd ३} \times$ अ $=$

$$२ \text{ अ}^{२} \surd ३$$

८९—परिभाषा—समबहुभुज क्षेत्र वह है जिसके कुल कोण और भुजाएं बराबर होते हैं (जैसे वर्ग, समत्रिबाहु त्रिभुज)

परिभाषा—समबहु भुज क्षेत्र का केन्द्र वह बिन्दु है जो उन वृत्तों का उभयनिष्ठ केन्द्र होता है जो उस बहुभुज क्षेत्र के बाहर व भीतर खींचे गए हैं।

टिप्पणी—यह बिन्दु उस बहुभुज क्षेत्र के भुजाओं और उस कुल कोण के बिन्दुओं से बराबर दूरी पर होता है और उसके कोणों को दो बराबर भागों में बांटनेवाली सब रेखा इसी बिन्दु पर मिलती हैं और वे रेखा भी यहीं पर मिलती हैं जो उस क्षेत्र के भुजों को दो बराबर भागों में काटनेवाले बिन्दुओं से समकोण बनाती हुई खींची जाती हैं॥

परिभाषा—समबहुभुज क्षेत्र का व्यासार्ध उसी वृत्ता का व्यासार्ध है जो उस बहुभुज क्षेत्र पर खींचा जाय—

परिभाषा—एपोथेम समबहुभुज क्षेत्र का उस वृत्त का व्यासार्ध है जो बहुभुज क्षेत्र के भीतर खींचा जाता है और यह उस लम्ब के बराबर होता है जो केन्द्र से भुज पर डाला जाता है॥

अभ्यास

१—सिद्ध करो कि किसी समबहुभुज क्षेत्र के दो क्रम से रखे हुए व्यासार्धों के बीच का कोन दो क्रमसे रक्खे हुए पपोथेम के मध्य के कोन के बराबर है ॥

२—साबित करो कि एक समबहुभुज क्षेत्र के क्रम से खींचे हुए व्यासार्धों के दरमियान का कोन और उस क्षेत्र का एक कोण मिल कर दो समकोण के बराबर होते हैं, अथवा वे पूरक होत हैं ॥

३—सिद्ध करो कि एक बर्ग का पपोथेम् उस वर्ग के आधे-भुज के बराबर होता है ॥

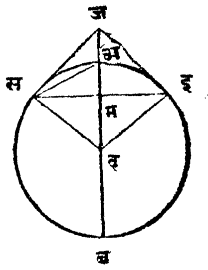
९०—रेखाग० ४-१२ से १६ तक के साध्य के प्रमाण के देखने से यह प्रत्यक्ष है कि यदि किसी वृत्त का परिधि कितना ही बराबर चापों में भाग किया जाय, तो वह बहुभुज क्षेत्र जो इन चापों के जीवाओं से वृत्त के भीतर बनेगा सम होगा; और वृत्त का बाहरी बहुभुज क्षेत्र, जो भाग के बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के खींचे जाने से बनता है, वृत्त के बाहर ऐसा समबहुभुज क्षेत्र होगा जिसकी भुजाओं की संख्या वही होगी जो भीतरी बहुभुज क्षेत्र की होती है ॥

९१—किसी वृत्त के भीतर खींचे हुए न भुज वाले किसी समबहुभुज क्षेत्रका भुज (= क) मालूम है; तो उसी वृत्तके भीतर बने हुए २न भुजाओं के समबहुभुज क्षेत्र का भुज (= क′) बताओ ॥

शकल ३८ में कल्पना करो कि स इ (= क) न भुजाओं के बहुभुज क्षेत्र का भुज है और अ वृत्त का अर्ध व्यास है ।

स इ पर व्यास अ ब लम्ब डालो, अ स को मिलादो, तब अ स वृत्त के भीतर बने हुए २न भुजों के समबहुभुज क्षेत्र की भुज है।

शकल ३८



मानलो कि अ स = क'

अब अ स^{२} = अ ब × अ म

= २ अ (अ — द म)

= अ (२ अ — २ द म)

परन्तु द म = $\sqrt{(\text{स द})^{२} — (\text{स म})^{२}}$

= $\sqrt{\text{अ}^{२} — \frac{\text{क}^{२}}{४}}$

= $\frac{१}{२}\sqrt{४\text{अ}^{२} — \text{क}^{२}}$

इस लिये अ स^{२} = अ ($२ \text{अ} — \sqrt{४ \text{अ}^{२} — \text{क}^{२}}$

और क' = $\sqrt{\text{अ} (२\text{अ} — \sqrt{४\text{अ}^{२} — \text{क}^{२}})}$............... (१)

अगर अ लम्बाई का पैमाना समझा जावै तो (१) से हमको नीचे दिया हुआ फल मिलता है॥

क' = $\sqrt{२ — \sqrt{(४ — \text{क}^{२})}}$............................ (२)

और चूंकि ($२ — \sqrt{४ — \text{क}^{२}}$) ($२ + \sqrt{४ — \text{क}^{२}}$) = क^{२}

या $२ — \sqrt{४ — \text{क}^{२}} = \frac{\text{क}}{\sqrt{२ + \sqrt{४ — \text{क}^{२}}}}$

(२) जो कि अभ्यास के लिये प्रायः काम देता है नीचे के रूप में लिखा जा सकता है॥

क' = $\frac{\text{क}}{\sqrt{२ + \sqrt{४ — \text{क}^{२}}}}$.............................. (३)

(२) व (३) के सम्बन्ध के अभ्यास से हमको बार बार उन समबहुभुज क्षेत्र की भुजाएं मालूम हो सकती हैं जिनकी भुज़ों की संख्या २ न, ४ न, ८ न, १६ न इत्यादि होती हैं और जो एकाई पैमाना के व्यासार्ध के वृत्त के भीतर बनाए गए हैं, जब कि मूल बहुभुज क्षेत्र की भुजों की संख्या न है॥

युक्ति ८५ से हमको यह मालूम है कि भुज एक वर्ग के वृत्त में, जिसका व्यासार्ध एकाई लम्बाई का है, बनाया गया है $= \sqrt{२} = १\cdot४१४२१$

इस लिये सम्बन्ध (२) से भुज १ समअष्टभुज क्षेत्र की जो उसी वृत्त के अन्तर्गत है $= \sqrt{२ - \sqrt{४ - २}}$

$$= \sqrt{२ - \sqrt{२}}$$

$$= \cdot७६५३६$$

इस लिये यदि हम उस वर्ग से आरम्भ करें जो एक वृत्त में बना हो जिसका व्यासार्ध एकाई पैमाने का है, तो हमको नीचे लिखे हुये फल मिलते हैं जो कि सम्बन्ध के हेतु लगातार पांति में रखे गए हैं; विद्यार्थी उनके सचाई के ठहराने को आप ही परिश्रम कर सकता है।

घेरने वाले वृत्त का व्यास = एकाई

समबहुभुज क्षेत्र की भुजों की संख्या	समबहुभुज क्षेत्र का अर्ध परिमिति
४	२· ८२८४२
८	३· ०६१४६
१६	३· १२१४४
३२	३· १३६५४
६४	३· १४०३३
१२८	३· १४१२७

फिर अगर हम उस समषट्भुज क्षेत्र से शुरू करें जो एक वृत्त में बना हो, जिसका अर्धव्यास एकाई पैमाने का है, और यह याद रखें कि एक भुज अर्धव्यास के बराबर होती है, तो हमको नीचे दिया हुआ फल (२) व (३) नियमों से लाभ होता है।

बाहरी वृत्त का अर्धव्यास = एकाई

समबहुभुज क्षेत्र की भुजों की संख्या	समबहुभुज क्षेत्र का अर्ध परिमिति
६	३·०००००
१२	३·१०५८२
२४	३·१३२६२
४८	३·१३९३५
९६	३·१४१०३
१९२	३·१४१४५

९२—यदि एक वृत्त में (अर्धव्यास = अ) बने हुए न भुजों के समबहुभुज क्षेत्र की एक भुज (क) दी हो तो उसी वृत्त पर के न भुजों के समबहुभुज क्षेत्र की भुजों (ह) को बताओ।

शकल ३८ में स इ = क और चूंकि स इ के अंतों पर स ज और इ ज सम्पात रेखा हैं, इस लिये स ज = ½ ह है। अब चूंकि कोन द स ज समकोण है और स बिन्दु से द ज पर स म लम्ब है, इसलिये

$$\frac{1}{सज^2} + \frac{1}{सद^2} = \frac{1}{सम^2} \quad (\text{युक्ति } ५४) \ldots\ldots (१)$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{सज^2} = \frac{1}{सम^2} - \frac{1}{सद^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{क^2}{४}} - \frac{1}{अ^2}$$

$$= \frac{४}{क^2} - \frac{1}{अ^2}$$

$$= \frac{४अ^2 - क^2}{क^2 \times अ^2}$$

$$\therefore स ज^2 = \frac{क^2 \times अ^2}{४ अ^2 - क^2}$$

$$और\ ह = २ स ज = \frac{२ क अ}{\sqrt{४ अ^2 - क^2}} \quad \ldots\ldots (२)$$

अगर अ = एकाई लंबाई

$$तो\ ह = \frac{२ क}{\sqrt{४ - क^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

इसी प्रकार से जब कि एक वृत्त के अन्तर्गत, जिसका अर्ध व्यास एकाई है, न, २ न, ४ न, ८ न, इत्यादि भुजों के समबहु भुज क्षेत्र की भुजाएं मालूम हों तो नियम (३) के सहारा से हम वृत्त के ऊपर खींचे हुए न, २ न, ४ न, ८ न, भुजों के समबहु भुज क्षेत्र के एक भुज निकाल सकते हैं ॥

नीचे के फ़ेहरिस्त से, जिसको विद्यार्थी आप साबित कर सकता है, वृत्त पर बने हुए समबहु भुज क्षेत्र की कुल भुज मालूम हो सकती हैं, और यह पहाड़ा युक्ति ९१ में के फ़ेहरिस्त के सदृश है।

भीतरी वृत का अर्धव्यास = एकाई

बाहरी समबहुभुज क्षेत्र की भुजाओं की संख्या	बाहरी समबहुभुज क्षेत्र का अर्धपरिमिति
४	४·०००००
८	३·३१३७१
१६	३·१८२६०
३२	३·१५१७३
६४	३·१४४१२
१२८	३·१४२२३
६	३·४६४११
१२	३·२१५४०
२४	३·१५९६७
४८	३·१४६०९
९६	३·१४२७२
१९२	३·१४१८८

९३—युक्ति ९२ से यह नतीजा निकलता है कि अगर २ न भुजों के वृत्त के भीतर बने हुए सम बहुभुज क्षेत्र की १ भुज क′ हो और २ न भुजों के वृत्त पर बने हुए समबहुभुज क्षेत्र की एक भुज ह′ हो तो

$$ह' = \frac{२ अ क'}{\sqrt{४ अ^२ — क'^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(३)$$

९४—प्रचलित उपपाद्य—

यदि क और ह क्रम से वृत के भीतरी और बाहरी न भुजाओं की समबहुभुज क्षेत्र की एक एक भुज हों और क′ और ह′ वृत्त में और वृत्त पर के २ न भुजाओं के समबहुभुज क्षेत्र की एक एक भुज हो और दोनों दशाओं में अ अर्धव्यास हो तो नीचे दिए हुए सम्बन्ध दिखाई देते हैं।

$$ह = \frac{२ अ क}{\sqrt{४ अ^२ — क^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(१)$$

$$क' = \sqrt{२अ^२ - अ\sqrt{४ अ^२ - क^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(२)$$

$$ह' = \frac{२ अ क'}{\sqrt{४अ^२ - क'^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(३)$$

$$और\ क = \frac{२ अ ह}{\sqrt{४ अ^२ + ह^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(४)$$

$$(३)\ से\ क' = \frac{२ अ ह'}{\sqrt{४ अ^२ + ह'^२}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(५)$$

$$और\ (२)\ से\ क = \frac{क'\sqrt{४ अ^२ — क'^२}}{अ} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(६)$$

सत्रहवां अभ्यास

१—एक वृत्त में जिसका अर्धव्यास १ गज़ है एक समत्रिबाहु त्रिभुज बनाया गया है, तो इस त्रिभुज की एक भुज दर्याफ्त करो।

२—एक वृत्त का अर्धव्यास ६ फ़ीट है, इसके भीतरी वर्ग की भुज निकालो।

३—एक समषटभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल ४०० है; उसकी एक भुज और उसके अन्तर्गत और वहिर्गत वृत्तों का व्यासार्ध बताओ।

४—सिद्ध करो कि एक वृत्त के बाहरी ओर के वर्ग का क्षेत्रफल उसी वृत्त के भीतरी ओर के वर्ग के क्षेत्रफल का दुगुना होता है।

५—एक वृत्त में के समषटभुज का क्षेत्रफल उसके ऊपर के समषट्भुज क्षेत्र के क्षेत्रफल का $\frac{३}{४}$ होता है; इसको साबित करो।

६—उस समषट्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा जिस की एक भुज ३० फीट है?

७—एक वृत्त का व्यासार्ध ५ इञ्च है तो इसके भतरी समषट्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल लाओ।

८—एक वृत्त का अर्धव्यास १२ फ़ीट है; उसके भीतर बने हुए १६ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र की भुज निकालो और उत्तर ३ स्थान तक दशमलव में लाओ। (कलकत्ता युनिवर्सीटी)

९—एक वृत्त पर एक वर्ग बनाया गया है। यदि वृत्त का अर्धव्यास ११ $\frac{१}{४}$ इ० हो तो वर्ग का क्षेत्रफल बताओ।

१०—एक वृत्त में बने हुए वर्ग में २०$\frac{१}{४}$ वर्ग फ़ीट अन्तर्गत हैं तो बाहर बने हुए वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

११—एक वृत्त के अंदर, जिसका व्यासार्ध ६ फ़ीट है, एक समषट्भुज क्षेत्र बना है तो इसका क्षेत्रफल बताओ।

१२—वृत्त के भीतर बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज ३० फ़ीट हैं, तो उस वृत्त हर बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज की परिमिति बताओ ॥

चौथा प्रकरण

वृत्त की परिधि

९५—वृत्त का शोधन वह सेापपाद्य है जिससे कि एक दिए हुए वृत्त के परिधि के बराबर सरल रेखा मालूम कर सकते हैं ॥

चूंकि वृत्तों के परिधेां को उनके व्यास से एक सम्बन्ध होता है, इस लिये वृत्त के शोधन से यह अभिप्राय है कि परिधि और व्यास का सम्बन्ध मालूम किया जावे ॥

गणित में प्रायः इस सम्बन्ध को ऐसे (π) चिन्ह से बताते हैं (जिसे पाई कहते हैं) और वह ऐसा है कि नाप में दूसरे के साथ कभी पूरा पूरा नहीं मिलाया जा सकता, यानी एक कभी शेष न होने वाला दशमलव है। बहुतेरे गणितकारेां ने—जिनको हंसी से पाई-परिमापक कहते हैं—पाई के फल को अचरज देने वाले गिनतियों तक फैलाया है। सन् १८७३ ई० में शैंक्स नामी एक साहब ने π के फल के दशमलव के ७०७ अंकेां तक फैलाया था, उनके पहिले के ३६ अंक नीचे दिए हैं ॥

३'१४१,५९२,६५३,५८९,७९३,२३८,४६२,६४३,३८३,२७९,५०२,८८४ ....

गणित के प्रयोजन से बहुत ज्यादः अंक यहां दिए हैं। केसी साहब ने कहा है कि पृथ्वी की परिधि को इञ्च के भिन्न में लाने के लिये दस अंक तक के दशमलव काफ़ी हैं और ३० अंक के दशमलवों से सारे संसार की परिधि यहां तक दर्याफ्त कर सकते हैं कि बहुत अच्छे खुर्दबीन से भी दिखाई नहीं देगी ॥

नियम—(परिधि को प लिखेंगे, अर्धव्यास को अ और व्यास को व)

$$\text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास}$$
$$= २\pi \times \text{अर्धव्यास}$$
$$= २\pi \times \text{अ}$$

या $\text{प} = २\pi \times \text{अ}$

और $\text{अ} = \frac{\text{प}}{२\pi}$

विद्यार्थी को तमाम व्योहारिक फलों के हेतु यह याद रखना अवश्य है कि—

$$\pi = ३\cdot१४१५९ \text{ लगभग}$$

टिप्पणी—३ स्थान दशमलवों तक $\pi = \frac{२२}{७}$, क्योंकि $\frac{२२}{७} = ३\cdot१४२$ और ६ स्थान दशमलव तक $\pi = \frac{३५५}{११३}$, क्योंकि $३५५ \div ११३ = ३\cdot१४१५९२९$

इसलिये ३·१४१५९ के स्थान में $\frac{२२}{७}$ या $\frac{३५५}{११३}$ ज़रूरत के मुआफ़िक हर एक लग भग उत्तर लाने के लिये काम में लाया जा सकता है। नीचे लिखे हुए इशारे से पिछली भिन्न सहज ही से याद रह सकती है। प्रथम तीन फुट अंकों में से प्रत्येक दो दो बेर लिखो और उनको एक रेखा से बीच में भाग करो, जैसे ११३/३५५। पस परिधि निकालने के लिये दो गुणा व्यासार्ध को π से गुणा करो और जब कि परिधि मालूम है तो परिधि की अर्ध लम्बाई को $\frac{१}{\pi}$ से गुणा करने पर व्यासार्ध मालूम हो सकता है॥

निरूपण—$\frac{१}{\pi}$ का अर्थ केवल समझने के लिये नीचे दिया जाता है, इसके कंठ करने का कोई प्रयोजन नहीं है॥

$$\frac{१}{\pi} = ०\cdot३१८,३०९,८८६,१८३,७९०,६७१,५३\ldots\ldots$$

उदाहरण १—एक वृत्त की परिधि बतलाओ जिसका व्यासार्ध ·६५ फ़ीट है।

$$प = २ \times ·६५ \times ३·१४१५९$$
$$= ४·०८ \text{ फ़ीट लग भग}$$

उदाहरण २—इलाहाबाद के मध्यान्ह रेखा का व्यासार्ध क्या है? (मध्यान्ह रेखा का चौथा भाग = १०⁷ मीटर दिया हुआ है)

$$अ = \frac{प}{२\pi} = २ \times १०^{७} \times \frac{१}{\pi} = २ \times १०^{७} \times ०·३१८३०९९$$
$$= ६३६६१९७ \text{ मीटर अनक़रीब ।}$$

९६—इस युक्ति में अर्कमीडीज़ की रीति के अनुसार, जो सन् २८७ से २१२ ईसवी के पहिले गणितविद्या के एक नामी पंडित हो गए हैं, एक सहज रीति से π का अर्थ निकालने की चेष्टा करते हैं। पहिली बेर पढ़ने में विद्यार्थी इसको छोड़ जा सकते हैं।

यह समझना मुशकिल नहीं है कि एक वृत्त की परिधि उसी वृत्त के भीतरी बहुभुज क्षेत्र के परिमित से बड़ी और उसी वृत्त के बाहरी बहुभुज क्षेत्र के परिमित से कम है॥

अब, वृत्त पर के वर्ग का परिमित व्यास का चौगुण होता है (रेखा ग० ४–८) और वृत्त के अन्दर के समषट्भुज का परिमित व्यास का त्रिगुण होता है; इसलिये π ४ से कम और ३ से अधिक है, अर्थात् ३ और ४ के बीच में होता है। अ को अगर $\frac{१}{२}$ के बराबर मानलें और युक्ति ९१ को काम में लावें तो वृत्त के भीतरी १२ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र का भुज = ·२५८८१९० और २४ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र का भुज = ·१३०५२६२ और ४८ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र का भुज = ·०६५४०३१ और ९६ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र का भुज = ·०३२७१९०

इस लिये वृत्त के अंदर बने हुए ९६ भुजों के समबहुभुज-क्षेत्र का परिमित = ९६ × ·०३२७१९० = ३·१४१०२४०

फिर युक्ति ९२ से वृत्त पर के ९६ भुजों के समबहुभुज क्षेत्र की परिमित ३·१४२७१३६ होती है। इस लिये π ३·१४१० और ३·१४२७ के मध्य में जान पड़ता है और ३ स्थान दशमलवों तक π = ३·१४१

अठारहवां अभ्यास

१—सही सही ४ स्थान दशमलव तक एक वृत्त की परिधि निकालो जिसका व्यासार्ध (१) १० फ़ीट (२) ५ फ़ीट ६ इञ्च (३) १ मील है॥

२—एक गाड़ी का पहिया जो ५२ इञ्च ऊंचा है, १३० मील जाने में कै वेर चक्कर काटेगा?

३—एक वृत्ताकार बाग़ की परिधि २८६ गज़ है, तो उस सीधी मार्ग की लम्बाई बताओ जो उस बाग़ के दर्मियान व्यास के तौर पर बना हुआ है॥

४—ज़मीन ३६५ दिन ६ घंटे में घूमकर एक वृत्त बनाती है जिसका व्यास १८७४००००० मील है, तो फ़ी घण्टे कै मील घूमती है?

५—पृथ्वी की भूमध्य रेखा रूपी व्यास ८००० मील है तो पृथ्वी के हर रोज़ चक्कर खाने के कारण भूमध्य रेखा पर की कोई जगह फ़ी घंटा कितने मील घूमती है?

६—एक घोड़ा एक घुड़दौड़ के चक्कर के चारों ओर जाने में फ़ी मिनिट में १५ वेर पूरा पूरा घूम जाता है। यदि इस चक्कर का व्यास २१ फ़ीट हो तो प्रति घंटा कै मील घोड़ा चलता है॥

७—एक गोल बगीचे के किनारे किनारे, जिसका व्यास १२६० फ़ीट है, ५½ गज के अंतर पर पेड़ लगाए जायं तो कुल कितने पेड़ लगाए जायेंगे?

८—एक गोल घास के मैदान का व्यास १०५ गज है। उसके चारों ओर घेरा बांधा जाय तो कितना लंबा होगा?

९—एक गोल बाटिका के घेरने का खर्च फी गज १ रु० दो आना के हिसाब से १२३ रुप्या १२ आना पड़ता है तो उस सीधी राह की लंबाई बताओ जो उस बाटिका को दो बराबर टुकड़ों में भाग करती है ॥

१०—एक घड़ी की मिनट वाली सूई की लंबाई बताओ जब कि उसका सिरा ३¾ मिनट में १५ इञ्च लंबे चाप पर घूमती है ॥

११—एक आदमी को एक गोल घसीली भूमि के ठीक बीचो बिच के राह से चलने से मालूम हुआ कि इसमें ४५ सेकन्ड उससे कम समय लगता है जो कि उस भूमि के बाहर बाहर चलने से लगता है। यदि वह मनुष्य १ मिनट में ८० गज़ चलै तो इस भूमिभाग का व्यास क्या होगा ? (कलकत्ता युनिवरसिटी)

१२—एक वर्ग, जिसकी भुज ५० फ़ीट है, एक वृत्त में बनाया गया है, तो इसका व्यास निकालो ॥

१३—एक वृत्त का व्यास ८ फ़ीट ४ इञ्च है तो इञ्च के ३ स्थान दशमलव में इसके परिधि की ठीक ठीक नाप बताओ ॥

१४—वृत्त की परिधि में एक बिन्दु से दो जीवा परस्पर समकोण बनाती हुई खींची गई हैं और उनकी लम्बाई ६० व ८९९ गज़ हैं; वृत्त की परिधि दरियाफ्त करो ॥

१५—एक गोल खेत की परिधि ३१४ गज़ १०·२८५७१४ इञ्च है, व्यास निकालो ॥ इस प्रश्न में $\pi = \frac{22}{7}$

१६—एक पहिये का व्यास क्या होगा जो एक मील में ८०० बेर फिरता है ?

१७—एक धर्म घड़ी की बड़ी सूई की लंबाई बताओ जब कि उसका सिरा ५ इञ्च लम्बे चाप पर ३¾ मिनिट में घूमती है ॥

१८—एक घड़ी की मिनिट वाली सूई ३ मिनिट में ५ इञ्च चलती है तो उसकी लंबाई क्या है ?

१९—एक वृत्त की परिधि १०० फ़ीट है तेा उस वृत्त के भीतरी वर्ग के भुज निकालेा; परिधि ग्रैार व्यास में ३·१४१५९ ग्रैार १ का सम्बन्ध है (जवाब २ स्थान दशमलव तक लाग्रो) ॥ (कलकत्ता युनी०)

२०—देा पहिये वाली गाड़ी का व्यास ५$\frac{1}{4}$ फ़ीट है तेा पहिये के दस लाख चक्करों में गाड़ी कितनी दूर जायगी ?

२१—देा सकेन्द्र वृत्तों की परिधि क्रम से १५६२ ग्रैार १३८६ फ़ीट हैं तेा इन वृत्तों से बने हुए वृत्ताकार मंडल की चैाड़ाई बताग्रो ॥

२२—एक गेाल टुकड़े ज़मीन का व्यासार्ध १४७ फ़ीट है तेा १ रु० ४ ग्राना एक गज़ को लागत से उसके घेरने में क्या लागत लगैगी ?

२३—एक धरम घड़ी की मिनिट वाली सुई ६$\frac{1}{2}$ इञ्च लंबी है व घंटे वाली ४$\frac{3}{4}$ इञ्च, तेा इन सूइयेां की चाल का संबंध निकालेा ॥

२४—एक ग्रर्ध वृत्त की परिमित ११२५ गज़ है तेा वृत्त का ग्रर्ध व्यास बताग्रो ॥

२५—ग्रनाज कांड़ने की कल खींचेने में घेाड़े लगाए गए हैं जेाकि उसके केन्द्र से १२$\frac{1}{4}$ फ़ीट के फ़ासले पर घूमते ग्रैार ३ मिनिट में १४ फेरा करते हैं तेा प्रत्येक घंटा घेाड़ों की चाल क्या है ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

पांचवां प्रकरण

मिश्रित साध्य

९७—त्रिभुज के अ ब स कोण अ ब ग्रैार स से सन्मुख के भुजेां पर के लम्ब क्रम से प, क ग्रैार ह हैं तेा त्रिभुज का क्षेत्रफल बताग्रो ॥

मानलो कि चिह्न $\triangle$ त्रिभुज के क्षेत्र फल का प्रतिनिधि है ॥

तब $\triangle = \frac{1}{2}$ अ प $= \frac{1}{2}$ ब क $= \frac{1}{2}$ स ह

इसलिये $\text{अ} = \frac{2\triangle}{\text{प}}$, $\text{ब} = \frac{2\triangle}{\text{क}}$ और $\text{स} = \frac{2\triangle}{\text{ह}}$ .... (१)

और $\text{श} = \frac{1}{2}(\text{अ} + \text{ब} + \text{स}) = \triangle\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)$

$\text{श} - \text{अ} = \frac{1}{2}(-\text{अ} + \text{ब} + \text{स}) = \triangle\left(-\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)$

$\text{श} - \text{ब} = \frac{1}{2}(\text{अ} - \text{ब} + \text{स}) = \triangle\left(\frac{1}{\text{प}} - \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)$

$\text{श} - \text{स} = \frac{1}{2}(\text{अ} + \text{ब} - \text{स}) = \triangle\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} - \frac{1}{\text{ह}}\right)$

परन्तु $\triangle = \sqrt{\text{श}(\text{श}-\text{अ})(\text{श}-\text{ब})(\text{श}-\text{स})}$

$$\therefore \triangle = \sqrt{\triangle^4\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(-\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(\frac{1}{\text{प}} - \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} - \frac{1}{\text{ह}}\right)}$$

$$\text{वा } \frac{1}{\triangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(-\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(\frac{1}{\text{प}} - \frac{1}{\text{क}} + \frac{1}{\text{ह}}\right)\left(\frac{1}{\text{प}} + \frac{1}{\text{क}} - \frac{1}{\text{ह}}\right)}$$

इस ढब से $\triangle$ अथवा क्षेत्रफल प, क, ह, की संज्ञा मालूम हो गई ॥

अनुमान—फल (१) से भुज भी मालूम हो सकती है ॥

उदाहरण—एक त्रिभुज के लम्ब ५ फ़ीट, २ फ़ीट, ४ इञ्च और १ फ़ुट ९ इञ्च हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल और उसके भुजों को दरयाफ्त करो ॥

यहां प = ६० इञ्च, क = २८ इञ्च, ह = २१ इञ्च

$$\therefore \frac{१}{प} + \frac{१}{क} + \frac{१}{ह} = \frac{१}{६०} + \frac{१}{२८} + \frac{१}{२१} = \frac{४२}{४२०}$$

$$-\frac{१}{प} + \frac{१}{क} + \frac{१}{ह} = -\frac{१}{६०} + \frac{१}{२८} + \frac{१}{२१} + \frac{२८}{४२०}$$

$$\frac{१}{प} - \frac{१}{क} + \frac{१}{ह} = \frac{१}{६०} - \frac{१}{२८} + \frac{१}{२१} = \frac{१२}{४२०}$$

$$\frac{१}{प} + \frac{१}{क} - \frac{१}{ह} = \frac{१}{६०} + \frac{१}{२८} - \frac{१}{२१} = \frac{२}{४२०}$$

$$\therefore \frac{१}{\triangle} = \frac{१}{(४२०)^२} \sqrt{४२ \times २८ \times १२ \times २}$$

इसलिये $\triangle = \frac{४२० \times ४२०}{७ \times ६ \times ४} = १०५०$ वर्ग इञ्च

और $अ = \frac{२ \times १०५०}{६०} = ३५$ इञ्च

$ब = \frac{२ \times १०५०}{२८} = ७५$ इञ्च

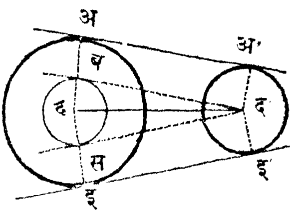
$स = \frac{२ \times १०५०}{२१} = १००$ इञ्च

टिप्पणी—सब से छोटा लम्ब सब से बड़ी भुज पर होता है

५८—दो वृत्तों के अर्धव्यास और उनके केन्द्रों के बीच का अंतर ज्ञात हो तो सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखों की लंबाई बताओ ॥

कल्पना करो कि अ इ और अ' इ' दो वृत्त हैं और द और द' उनके केन्द्र एक दूसरे से स दूरी पर हैं

शकल ३९



फ़र्ज़ करो कि उनके अर्ध व्यास द अ और द' अ' क्रम से बराबर अ और अ' के हैं और अ बड़ा है अ' से ॥

केन्द्र द से अ—अ' दूरी पर वृत्त ब स खींचो और द' बिन्दु से द' ब और द' स सम्पाति रेखा वृत्त ब स पर खींचो ॥

द ब और द स को मिला कर बढ़ाओ कि वे वृत्त अ इ से बिन्दु अ और इ पर मिलें ॥

बिन्दु द' से द' अ' और द' इ' क्रमसे द अ और द इ के समानान्तर खींचो ।

अ अ' और इ इ' को मिलाओ ।

अ अ' और इ इ' सीधी उभयनिष्ठ सम्पाति रेखा होगी ।

चूंकि द अ = अ और द ब = अ–अ'

इसलिये अ ब = अ–(अ–अ') = अ' = द' अ'

और द' अ' समानान्तर अ ब के खींचा गया है

इसलिये अ अ' बराबर और समानान्तर है द ब के और अ और अ' कोण समकोण हैं

इसलिये अ अ' उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है ।

इसी प्रकार से इ इ' दूसरी सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है ॥

फिर अ अ' = द ब

$$= \sqrt{(\text{द द}')^2 - (\text{द ब})^2}$$

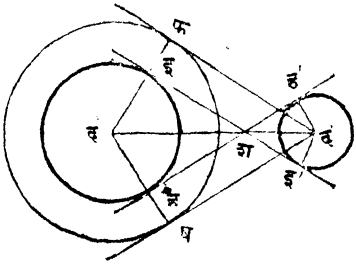
$$= \sqrt{\text{स}^2 - (\text{अ}-\text{अ}')^2}$$

$$= \sqrt{(\text{स}+\text{अ}-\text{अ}')(\text{स}-\text{अ}+\text{अ}')}$$

९९—दो वृत्तों के अर्धव्यास और उनके केन्द्रों की दूरी दी हुई है तो बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लम्बाई बताओ ॥

मान लो कि इ ह और इ′ ह′ दो वृत्त हैं और द और द′ उनके केन्द्र एक दूसरे म दूरी पर हैं और उनके अर्धव्यास द इ और द′ इ′ क्रम से अ और अ′ के तुल्य हैं ॥

शकल ४०



केन्द्र द से अ + अ′, दूरी पर फ ज वृत्त खींचो और बिन्दु द′ से वृत्त फ ज पर द′ फ और द′ ज स्पर्शरेखा खींचो।

वृत्त इ ह को बिन्दु इ और ह पर काटते हुए द फ और द ज को मिला दो। बिन्दु द′ से द′ इ′ और द′ ह′ क्रम से द फ और द ज के समानान्तर खींचो।

इ इ′ और ह ह′ मिलादो।

तो इ इ′ और ह ह′ बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा होगी।

क्योंकि द फ = अ + अ′ और द इ = अ

∴ इ फ = अ′

और द′ इ′ समानान्तर इ फ के खींचा गया है।

∴ इ इ′ बराबर और समानान्तर द′ फ के है;

इ और इ′ पर के कोण समकोण हैं।

इसलिये इ इ′ बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार से ह ह′ दूसरी बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है।

फिर इ इ′ = द′ फ

$$= \sqrt{(\text{द द}')^2 - (\text{द फ})^2}$$

$$= \sqrt{\text{म}^2 - (\text{अ} + \text{अ}')^2}$$

$$= \sqrt{(\text{म} + \text{अ} + \text{अ}')\ (\text{म} - \text{अ} - \text{अ}')}$$

उदाहरण--दो वृत्तोंके अर्ध व्यास क्रम से ७ और १७ फ़ोट हैं और उनके केन्द्रों की दूरी २६ फ़ीट हैं तो उनकी सीधी और बेड़ी स्पर्श रेखाओं की लम्बाई निकालो।

सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई

$$= \sqrt{(२६+१७-७)\ (२६-१७+७)}$$

$$= \sqrt{३६ \times १६} = \underline{२४} \text{ फ़ीट}$$

बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई

$$= \sqrt{(२६+१७+७)\ (२६-१७-७)}$$

$$= \sqrt{५० \times २} = \underline{१०} \text{ फ़ीट ॥}$$

१००--समबहुभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल--प्रत्येक समबहुभुज क्षेत्र पर एक वृत्त खींचा जा सकता है, इस वृत्त के केन्द्र को उस बहुभुज क्षेत्र का केन्द्र कह सकते हैं क्योंकि सब लंब जो इस बिन्दु से खींचे जा सकते हैं बराबर होते हैं और इस बिन्दु की दूरी बहुभुज के कोणों से बराबर होती है (युक्ति ८९ देखो), यह साफ़ मालूम होता है कि केन्द्र को कोण के विन्दुओं से मिलाने से बहुभुज उतने समान त्रिभुजों में भाग हो जाता है जितने कि उस बहुभुज में भुज हैं ॥

इसलिये—

नियम--केन्द्र से किसी भुज पर के लम्ब को बहुभुज के परिमित से गुणा करो तो आधे गुणनफल से क्षेत्रफल मालूम होगा ॥

उदाहरण--एक सम पंचभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ जिसकी भुज ५ फ़ीट और केन्द्र से हर एक भुज पर का लंब ३·४४०९५४७ फ़ीट है ॥

यहां ५ × ५ = २५ परिमित
और २५ × ३.४४०९५४७ = ८६.०२३८६७५
इसका आधा ४३.०११९३३७५ वर्ग फ़ीट
चाहा हुआ क्षेत्रफल है।

निरूपण--समबहुभुज क्षेत्रों के लम्ब और भुज पराधीन आकार हैं परन्तु त्रिकोण मिति (ट्रीगनोमिटरी) की सहायता से एक दूसरे से निकाले जा सकते हैं ॥

१०१—नीचे के नक़शे में दस सम बहुभुज क्षेत्रों के क्षेत्रफल और उनके बाहरी और भीतरी वृत्तों के अर्ध व्यास दिए हुए हैं और हर एक भुज की लम्बाई एकाई अनुमान की गई है ॥

बहुभुज की भुजों की संख्या	क्षेत्रफल	अर्धव्यास भीतरी वृत्त का	अर्धव्यास बाहरी वृत्त का
३	०.४३३०१२७	०.२८८६७	.५७७३५
४	१.०००००००	०.५००००	.७०७१०
५	१.७२०४७७४	०.६८८१९	.८५०६५
६	२.५९८०७६२	०.८६६०२	१.०००००
७	३.६३३९१२४	१.०३८३	१.१५२३
८	४.८२८४२७१	१.२०७१	१.३०६५
९	६.१८१८२४२	१.३७३७	१.४६१९
१०	७.६९४२०८८	१.५३८८	१.६१८०
११	९.३६५६४०७	१.७०२८	९.७७४७
१२	११.१९६१५२४	१.८६६०	१.९३१८

निरूपण--जब भुज अ है तो क्षेत्रफल = अ^{२} × ऊपर के नक़शे में क्षेत्रफल के ख़ाने में भुज अ के सन्मुख दिए हुए अंक के ॥

१०२--वृत्त का क्षेत्रफल--युक्ति १०१ से साफ़ मालूम है कि अगर एक समबहुभुज क्षेत्र किसी वृत्त के भीतर खींचा हुआ विचार किया जावे तो उस बहुभुज का क्षेत्रफल बराबर होगा उस गुणनफलके जो बहुभुजके अर्ध परिमित को केन्द्र से किसी भुज पर के लंब से गुणा करने से मिलता है।

अब मान लो कि बहुभुज की भुजाओं को अनिश्चित संख्या तक बढ़ा ली गई हैं तब बहुभुज का परिमित वृत की परिधि हो

जाता है और केन्द्र से किसी भुज पर का लम्ब वृत्त का अर्ध-व्यास हो जाता है, इसलिये वृत्त का क्षेत्रफल अर्ध परिधि और अर्धव्यास के गुणनफल के बराबर है ॥

अब यदि अ अर्धव्यास माना जावे तो 2πअ परिधि हुआ (९४ युक्ति) और πअ अर्धपरिधि हुआ

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \pi\,\text{अ} \times \text{अ} = \pi\,\text{अ}^2$$

नियम--अ नाप के अर्धव्यास के वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \text{अ}^2$

१०३--नियम--यदि क्षेत्रफल को क्ष और अर्ध व्यास को अ और ब = २अ = व्यास और प को वृत्त की परिधि मान लेवें तो।

$$\text{क्ष} = \pi\,\text{अ}^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$= \frac{\pi\,\text{ब}^2}{4} \quad \ldots \quad (2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{प}\,\text{अ} \quad \ldots \quad (3)$$

$$= \frac{\text{प}^2}{4\pi} \quad \ldots \quad (4)$$

$$(1) \text{ से } \text{अ} = \frac{\sqrt{\text{क्ष}}}{\sqrt{\pi}} = \cdot 5641896 \times \sqrt{\text{क्ष}}$$

$$(2) \text{ से } \text{ब} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\text{क्ष}} = 1.1283792 \times \sqrt{\text{क्ष}}$$

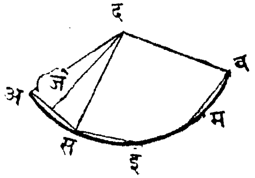
$$(4) \text{ से } \text{प} = 2\sqrt{\pi\,\text{क्ष}} = 3.5449077 \times \sqrt{\text{क्ष}}$$

१०४-वृहत् खण्ड का क्षेत्रफल—

फ़र्ज़ करो द अ ब एक वृहत् खण्ड है और द केन्द्र है मान लो कि चाप अ ब, अ स, स इ,....................म ब,

यदि बराबर न भागों में बटा हुआ है। अ स, द स को मिलाओ और द ज को अ स पर का लम्ब खींचो, तब त्रिभुज द अ स का क्षेत्र-फल बराबर है ½ अ स × द ज और बहुभुज क्षेत्र द अ स इ · · · ब का क्षेत्रफल = न × ½ अ स × द ज।

शकल ४१



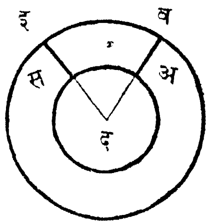
अब मान लो कि न का अंक अनिश्चित है, तो वृहत् खंड अ स की परिधि को ढक लेता है, और न × अ स = चाप अ ब, और द ज अर्ध व्यास हो जाता है। इसलिये क्षेत्रफल वृहत् खंड का = ½ अ × वृहत् खंड का चाप ॥

नियम—वृहत् खण्ड का क्षेत्रफल = ½ अर्ध व्यास × चाप

१०५—एक वृत्ताकार मंडल का क्षेत्रफल—

कल्पना करो कि अ ब इ स एक मंडल है और अ अ′ क्रम से बाहरी और भीतरी वृत्त के अर्ध व्यास हैं ॥

शकल ४२



तब बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल बराबर है π अ^2 के, और भीतरी वृत्त का बराबर है π अ′^{2} के, और दोनों वृत्तों के बीच का फ़ासला = π अ^2 − π अ′^{2}, या

π (अ + अ′) (अ − अ′)

निरूपण—इस शकल में वृत्त सकेन्द्र हैं और इसलिये मंडल की चारों तरफ़ की चौड़ाई एक भाव है चूंकि अ ब = स इ = अ − अ′ और ऊपर का फल उस दशा में भी ठीक है जब कि वृत्त सकेन्द्र नहीं हैं ॥

उन्नीसवां अभ्यास

१—एक गोल खेत की परिधि २००० गज़ है तो एकड़ व रोड व पोल में इसका क्षेत्रफल बताओ ॥

२—एक चक्राकार रमने के बाहर जिसका अर्धव्यास ५८५ फ़ीट है चारों ओर एक गाड़ी का रास्ता बनवाना है और उस पर ३० फ़ीट चौड़ा ९ इञ्च गहिरा कंकड़ बिछवाना है, तो बताओ कि फ़ी १०० घन फ़ीट ६ रु० के हिसाब से क्या ख़र्च पड़ेगा ॥

३—एक वृत्त की परिमित किसी त्रिभुज के परिमित के बराबर हो तो वृत्त का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल से अधिक होता है—इस बात को उस दशा में साबित करो जिसमें कि त्रिभुज की भुज ९, १०, और १७ फ़ीट हैं ॥

४—एक बर्ग के एक कोण को केन्द्र मान कर एक वृत्त खींचा गया है जो उस बर्ग को दो बराबर हिस्सों में भाग करता है; अगर बर्ग के एक भुज की लंबाई १० फ़ीट हो तो वृत्त का अर्ध-व्यास निकालो ॥

५—एक वृत्त जिसका क्षेत्रफल ३.१४१६ बर्ग इञ्च है सकेन्द्र वृत्तों से चार बराबर भागों में भाग किया गया है तो हर एक का व्यास क्या है ॥

६—एक वृत्त के चाप का क्षेत्रफल क्या होगा जिसका खंड उसका चौथा भाग और व्यास १२ फ़ीट है ॥

७—एक धातु के वृत्ताकार पत्तर में ३५ बराबर छेद किए गए हैं; अब छेद किए हुए पत्तर के धातु में और छेद करने से जो धातु निकल गया है उसमें ऐसा सम्बन्ध है जैसा कि ४५ : ६७ में है, तो उस पत्तर और छेदों के व्यासों के संबंध को बताओ ॥

८—एक वर्ग का कर्ण २० है, उस पर खींचे हुए वृत्त के एक खंड का क्षेत्रफल निकालो ॥

९—एक त्रिभुज की भुजाएं क्रम से ३७२, ३५० व ३२० गज़ हैं; इसके भीतर बने हुए वृत्त का क्षेत्रफल बर्ग जरीब में लाओ ॥

१०—एक वृत्त में बने हुए त्रिभुज की तीनों भुज क्रम से १६०, ३०० व ३४० फ़ोट हैं, तो उस वृत्त और त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अंतर बताओ ॥

११—नीचे की बात को सिद्ध करो–दो सकेन्द्र वृत्तों के मध्य के फैलाव का क्षेत्रफल उस वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका व्यास उस बाहरी वृत्त की एक जीवा है और जो भीतरी वृत्त को छूता है ॥

१२—एक दफ़्ती में से जो दश इञ्च वर्ग है बड़े से बड़े चार बराबर वृत्तों के काट लेने से कितने वर्ग इञ्च ख़राब होंगे ॥

१३—एक रुपए का व्यास १$\frac{1}{8}$ इञ्च है, अगर एक मेज़ पर तीन रुपए इस तरह पर रक्खे जांय कि हर एक का कोर उन दोनों को छुवै तो उन तीनों के बीच की ख़ाली जगह का क्षेत्रफल दरयाफ़्त करो ॥

१४—एक वर्ग और षट्भुज और वृत्त के क्षेत्रफल क्या होंगे जब कि हर एक की परिमित ३००० फ़ीट है ॥

१५—किसी वर्ग के चारों कोनों में से ऐसे चार हिस्से निकाल लिए गए कि जिनमें से हर एक उस वर्ग का चौथा भाग है और जो हर एक उस वर्ग के दो भुजों को आधा आधा काट देते हैं। इन चौथे भागों से घिरे हुए टेढ़े वर्ग का क्षेत्रफल क्या है, अगर बड़े वर्ग का फ़ी भुज म के बराबर हो ॥

१६—एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल ३२४० और उस के चाप की लंबाई १०८ है तो अर्ध व्यास क्या है ॥

१७—एक घड़ी के चेहरे का क्षेत्रफल बताओ जब कि उसका व्यासार्ध १ फ़ुट ९ इञ्च है ॥

१८—एक वर्ग का क्षेत्रफल १५२२७५६ वर्ग फ़ीट है, उसके भीतर बड़े से बड़े वृत्त का क्षेत्रफल एकड़ और एकड़ के दशमलव में दरयाफ़्त करो और उसके परिधि की भी लम्बाई निकालो ॥

१९—एक समषट्भुज क्षेत्रकी भुज १०० फ़ीट है तो उस पर बने हुए वृत्तका क्षेत्रफल क्या होगा ॥

२०—एक वृत्तमें एक त्रिभुज बनाया गया है जिसके भुज १२, १४ और १८ इञ्च हैं सो तो वृत्त का क्षेत्रफल निकालो ॥

२१—एक गोल ज़मीन के टुकड़े का क्षेत्रफल निकालो जिसकी परिधि २० फ़ीट है ॥

२२—एक वृत्ताकार घेरे के भीतर–जिसमें बाग़ लगाए जाएंगे। एक गोल तालाब खोदना है जिसकी सब से ज़्यादः चौड़ाई ३६० गज़ होगी। तालाब में ठीक उतना ही ख़र्च बैठेगा जितना कि उस घेरे के भीतर बाग़ लगाने में होगा। परन्तु अगर ज़मीन की सतह का हिसाब देखा जाय तो तालाब के ज़मीन में फ़ी गज़ दूना ख़र्च मालूम होता है। वर्ग फ़ीट में तालाब का क्षेत्रफल क्या होगा ॥

२३—एक गोल घसीली भूमि का व्यास ४० गज़ है और उस के चारों तरफ़ एक कंकड़ीला रास्ता एक गजके बाद एक गज़ चौड़ा बना हुआ है; बताओ कि ४ पेन्स फ़ी वर्ग गज़ के हिसाब से इस भूमि पर घास जमाने में क्या लागत होगी ॥

२४—एक घड़ी की मिनिट वाली सुई ६ इञ्च लंबी है और घंटा वाली ५ इञ्च, तो पहिले का सिरा एक वर्ष में कितना चलता है। और यह भी बताओ कि एक ही समय में दोनो सुइयों के तै किए हुए क्षेत्रफलों में क्या अंतर है ॥

२५—बताओ कि २१ मिनिट में बड़ी सुई, जो ९ इञ्च लंबी है, कितना क्षेत्रफल तै करेगी। अगर घंटे वाली सुई मिनिट वाली सुई की $\frac{1}{3}$ भाग हो तो उतने ही वक़्त में घंटे वाली सुई कितने क्षेत्रफल पर चलेगी ॥

२६—एक घोड़ा १० फ़ीट लंबी ज़ंजीर से बंधा है, वह ज़ंजीर एक छल्ले में लगी है और वह छल्ला एक ऐसी छड़ी में पहिनाया हुआ है कि जो झुक कर एक आयत बनाता है जिसके

भुज ३० और २५ फ़ीट लंबे हैं, कितने खेत में घूम घूम कर घोड़ा घास चर सकता है और अगर वह ज़ंजीर २० फ़ीट करदी जाय तो चरने की जगह कितनी बढ़ जायगी ॥

किए हुए उदाहरण

१०६—उदाहरण १—यदि अ = २०, ब + स = २२, और मिडियन अ द = $\sqrt{३७}$, तो ब और स निकालो

युक्ति ३३ से ब^२ + स^२ = २ × ३७ + २ × १०^२

= २७४ . . . . (१)

और ब + स = २२ . . . . (२)

∴ ब^२ + स^२ + २ ब स = ४८४

∴ २ ब स = २१० . . . . (३)

(३) को (१) में से घटाने पर ब^२ + स^२ — २ ब स = ६४ या ब — स = ८

इसलिये (१) और (२) से ब = १५, स = ७

उदाहरण २—एक समकोण त्रिभुज का कर्ण १६९ फ़ीट है और बाक़ी दो भुजों का योग २३९ है तो त्रिभुज के भीतरी वृत्त का अर्ध व्यास बताओ।

शकल ४३ में अ ब = १६९; अ स + ब स = २३९; द इ = द ज = द फ और ज, स और इ बिन्दुओं पर के कोण समकोण हैं ॥

∴ द ज = द इ = स इ = स ज = अ

लेकिन अ फ = अ ज और

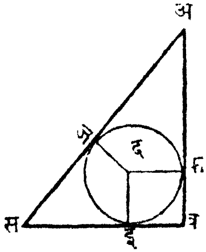
ब फ = ब इ

∴ अ स + ब स = अ ज + ब इ + ज स + स इ = अ ब + २ अ = १६९ + २ अ

लेकिन अ स + ब स = २३९

∴ २ अ = २३९ — १६९ = १६०, या अ = ८०

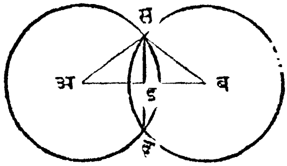
शकल ४३



उदाहरण ३—दो वृतों के अर्धव्यास क्रम से २५ और १०१ फ़ीट हैं और उनके केन्द्रों की दूरी ११४ फ़ीट है तो उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई क्या होगी ॥

त्रिभुज अ ब स में भुज अ ब = ११४, अ स = २५ और ब स = १०१

शकल ४४



इसलिये युक्ति ३१ से क्षेत्रफल अ ब स = ११४० वर्ग फ़ीट अब स इ विन्दु स से अ ब पर लम्ब है।

$$\text{इसलिये स इ} = \frac{२ \times ११४०}{११४} = २० \text{ फ़ीट}$$

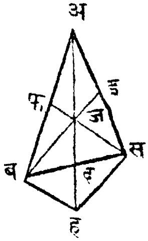
इसलिये स द = २ स इ = ४० फ़ीट ॥

उदाहरण ४—एक त्रिभुज की भुजाएं $\sqrt{२ ब^२ + २स^२ - अ^२}$, $\sqrt{२स^२ + २ अ^२ - ब^२}$ और ३ स हैं तो क्षेत्रफल बताओ ॥

शकल ४५ में मान लो कि ब स = अ, स अ = ब, अ ब = स, और अ द, ब इ, स फ मिडियन हैं

अब अपोलोनियस नामी गणितकार के प्रमेयोपपाद्य (युक्ति ३४) से

शकल ४५



$$अ स^२ + अ ब^२ = २ ब द^२ + २ अ द^२$$

$$\text{या } ब^२ + स^२ = २ \times \left(\frac{अ}{द}\right)^२ + २ अ द^२$$

$$\therefore २.अ द^२ = ब^२ + स^२ - \frac{अ^२}{२}$$

$$\text{अथवा } ४ अ द^२ = २ ब^२ + २ स^२ - अ^२$$

$$\therefore २ अ द = \sqrt{२ ब^२ + २ स^२ - अ^२}$$

$$\text{लेकिन } २ अ द = २ \times \tfrac{३}{२} अ ज = ३ अ ज$$

$$\text{इसलिये } \sqrt{२ ब^२ + २ स^२ - अ^२} = ३ अ ज$$

$$\text{इसी प्रकार से } \sqrt{२ स^२ + २ अ^२ - ब^२} = ३ ब ज$$

और ३ स = ३ अ ब

पस ऐसे त्रिभुज के क्षेत्रफल निकालने में जिसके भुज अ ब ज त्रिभुज के भुजों से तिगुणे हैं सवाल बराबर ही रहता है। इसलिये चाहा हुआ क्षेत्रफल

= ९ × अ ब ज का क्षेत्रफल

= ३ × अ ब स का क्षेत्रफल

= ३ $\sqrt{\text{श (श–अ) (श–ब) (श–स)}}$

उदाहरण ५—सिद्ध करो कि समद्वादश भुजक्षेत्र का क्षेत्रफल उसी क्षेत्र पर बने हुए वृत्त के अर्धव्यास पर के वर्ग का तिगुना होता है॥

शकल ३८ में अगर स इ एक समषट् भुज क्षेत्र की भुज हो तो स अ समद्वादश भुज क्षेत्र का भुज है और इस द्वादश भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल

=१२ × क्षेत्रफल द अ स

= ६ × क्षेत्रफल द स × अ इ

= ६ × $\frac{१}{२}$ द अ × स इ (युक्ति ४०)

= ३ × द अ^{२} = ३ अ^{२}

मिश्रित उदाहरण।

१—किसी वृत्त की परिधि के एक बिन्दु से दो जीवा आपस में समकोण बनाती हुई खींची गई हैं और उनकी लम्बाई क्रम से ६६ व ७७·९ गज़ है तो वृत्त का अर्ध व्यास बताओ॥

२—एक वृत्त की दो जीवाओं की लम्बाई जो समकोण पर एक दूसरे को काटती हैं क्रम से १२ और १६ फ़ीट हैं और केन्द्र से उनके काटने के बिन्दु की दूरी ५ फ़ीट है तो व्यास निकालो॥

३—एक वृत्त के दो चापों की जीवा क्रम से ५७ और ६० फ़ीट हैं और इन चापों से मिलकर बने हुए चाप की जीवा १११ फ़ीट है तो वृत्त का व्यास दरयाफ्त करो॥

४—ज़मीन की परिधि २५००० मील है और शहर लन्दन से यार्क नगर की दूरी २०० मील है, ते बताओ कि एक मनुष्य ग़ुब्बारे पर इन स्थानों में से किसी एक से किस उंचाई तक चढ़े कि दूसरे स्थान के देख सके ॥

५—एक त्रिभुज की भुजें का आपस में सम्बन्ध १३ : १४ : १५ है और परिमित ८४ गज़ है ते कोण के विन्दुओं से भुजें पर के लम्ब दरयाफ्त करो ॥

६—एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोणें से सन्मुख की भुजें के मध्यबिन्दु तक दो खींची हुई रेखाओं की लम्बाई क्रम से १० और ४ √१० फ़ीट हैं ते त्रिभुज के भुजें के बताओ ॥

७—एक इञ्च मोटी लकड़ी की बनी हुई बिना ढकने की सन्दूक़ बाहर और भीतर रङ्गवाना है। इसकी बाहरी लम्बाई चौड़ाई और गहराई क्रम से ३, २ और १½ फ़ीट हैं ते प्रत्येक पर्त के लिये कितने वर्ग फ़ीट रङ्ग की ज़रूरत है ॥

८—एक त्रिभुज की भुजाएं १३, ९ और ६ हैं ते (१) तीनें उंचाई, (२) तीनें मिडियन और (३) उस पर बने हुए वृत्त का अर्ध व्यास ठीक ठीक तीन स्थान दशमलवें तक दरयाफ्त करो ॥

९— अगर एक समषट्भुज और वर्ग और समत्रिबाहु त्रिभुज एक वृत्त के भीतर बनाए जावें, ते साबित करो कि वर्ग जे इस त्रिभुज की भुजा पर बनाया जाता है बराबर होता है उन वर्गों के येागफल के जे बाक़ी दे क्षेत्रों में से हर एक की एक भुज पर बनाया जावे ॥

१०—एक कमरे का फ़र्श ३० फ़ीट लम्बा और २४ फ़ीट चौड़ा है। उसे पटिओं से जड़वाना है। अगर कुल पटियां एक ही दिशा में रक्खी जावें ते चौड़ाई की ओर की पटियें की संख्या लम्बाई की ओर की संख्या से २ अधिक होती हैं और जब कि कुल पटियां दूसरी दिशा में रक्खी जाती हैं ते लम्बाई की ओर की संख्या चौड़ाई की ओर की संख्या से ७ अधिक

होती हैं। बताओ कि फ़र्श के ढकने के लिये कुल कितनी पटियों की ज़रूरत होगी ॥

११—साबित करो कि एक वृत्त की परिधि और उस वृत्त में बने हुए षट्भुज के भुजों के परिमित का अन्तर उस वर्ग के एक भुज के १/५ से कुछ ही अधिक है जो उस वृत्त में बनाया जाता है ॥

१२—एक वृत्त में बने हुए सम त्रिबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ३८९.७ है तो उसी वृत्त में बने हुए बर्ग का क्षेत्रफल बताओ ॥

१३—किसी वृत्त के चौथे भाग में जिसका अर्ध व्यास √३ है है एक बर्ग बनाया गया है जिसकी दो भुज उस चौथाई वृत्त के घेरने वाले अर्ध व्यासों पर पड़ती है तो उस बर्ग का क्षेत्रफल निकालो ॥

१४—एक समषट्भुज की भुज बताओ जब कि इसका क्षेत्रफल बराबर है एक समत्रिबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल के जिसकी प्रत्येक भुज ५०० फ़ीट है ॥

१५—एक समत्रिबाहु त्रिभुज का आधार अर्धवृत्त के व्यास पर और शीर्ष उसी अर्ध वृत्त के चाप के मध्य में पड़ता है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल १०० है तो अर्ध वृत्त का व्यास दरयाफ़्त करो॥

१६—एक समत्रिबाहु त्रिभुज, एक बर्ग और एक समषट्भुज की भुजों का योग बराबर है, तो उनके क्षेत्रफलों का मुक़ाबिला करो ॥

१७—एक समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज निकालो जिसका क्षेत्रफल उतना ही बर्ग गज़ है जितना कि उसके घेरे में रेखाकार गज़ों की संख्या है ॥

१८—एक समकोण क्षेत्र के भुजों का योगफल ४३४ फ़ीट है और कर्ण १७५ फ़ीट है तो भुज क्या हैं ॥

१९—एक समानान्तर चतुर्भुज की उंचाई क्या है जब कि इसका आधार ५६० फ़ीट और क्षेत्रफल ७००० बर्ग गज़ है ॥

२०—एक गोल ज़मीन के चारों ओर दो पहिये की गाड़ी को एक बेर घुमाने में यह देखा गया कि बाहरी पहिये ने १३ ३/४ चक्कर किए जब कि भीतरी पहिए ने ११ ही किए। एक पहिया दूसरे से ४ फ़ीट १० १/६ इञ्च दूर है तो पहियों के और उस वृत्त के व्यास को भी बताओ जो भीतरी पहिए के चक्कर से बनता है॥

२१—नीचे दी हुई निर्दिष्ट से वृत्तके व्यास दरयाफ्त करने के नियमों को लिखो—

(१) चाप का शर और अर्ध चाप की जीवा।

(२) वृत्तके भीतर बने हुए त्रिभुज की भुजाएं।

एक वृत्त की परिधि एक जीवा से जिसकी लम्बाई ७२० है दो चापों में भाग हो गया है। व्यास ९०० है तो छोटे चाप का शर और बड़े चाप के आधे चाप की जीवा बताओ॥

२२—एक आदमी किसी नदी के किनारे पर खड़ा होकर यह देखता है कि दूसरे किनारे पर के एक पेड़ की उंचाई का कोण ६० अंश का है; ८० फ़ीट और पीछे हटने से वह देखता है कि यह कोण ३० अंश का है; दरख्त की उंचाई और नदी की चौड़ाई दरयाफ्त करो॥

२३—कितने पल्ले १ १/६ इञ्च मोटाई के २१ इञ्च मोटी लकड़ी में से काटे जा सकते हैं जब कि आरा खींचने में हर दफ़े १/८ इञ्च नाश होता है॥

२४—एक त्रिभुज की दो भुज ६० व ८९९ फ़ीट हैं, यदि इनका अन्तर्गत कोण ९० अंश का हो तो आधार पर का लम्ब निकालो॥

२५—अ स एक वृत्तका व्यास और उसी वृत्त में बने हुए चतुर्भुज क्षेत्र अ ब स द का कर्ण है। अगर अ ब = ३०, ब स = ४०, स द = ४८, तो अ द और चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल दरयाफ्त करो॥

२६—एक वृत्ताकार बाट की लम्बाई निकालो जब कि वह त्रिकोणाकार खेत के तीनों भुजों को, जो क्रम से ७८, ३५ व ९७

गज़ हैं, छूता है और खेत के कोणों से उस राह का सब से छोटा व सब से बड़ा फ़ासिला भी दरयाफ्त करो ॥

२७—एक समअष्टभुज क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो जिसकी हर एक भुज माप में ५ जरीब हैं। जवाब को एकड़ व रोड आदि में लाओ ॥ (कलकत्ता युनीवरसिटी)

२८—एक दो पहिए की गाड़ी जिसकी धुरी ४ फ़ीट लम्बी है एक वृत्तके हर तरफ़ चलाई जाती है। भीतरी पहिया एक चक्कर करता है तो बाहरी पहिया १$\frac{1}{2}$; बाहरी पहिए से जो वृत्त बनता है उसकी परिधि दरयाफ्त करो ॥ (कलकत्तायुनी०)

२९—एक समषट्भुज क्षेत्र की भुज निकालो जिसका क्षेत्रफल बराबर है उस समत्रिबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल के जिसकी भुज ९०० गज़ है ॥

३०—एक गाड़ी का पहिया (जिसका व्यास २८ इञ्च है) एक चौरस ज़मीन पर चलने में ३६० बेर घूमता है, तो बताओ कि पहिए के सिरे पर के विन्दु ने कितना क्षितिजाकार फ़ासला तै किया ॥

३१—एक समकोण त्रिभुज का कर्ण १५० है, और समकोण से उस पर का लंब २४ है तो कुल भुज बताओ ॥

३२—एक ५० मील ऊंचे उल्के (टूटता हुआ तारा) की उंचाई का कोण ३०° का है तो देखने वाले से एक ऐसे स्थान की दूरी निकालो जो उल्का के ठीक नीचे है ॥

३३—समानान्तरचतुर्भुज की दो आसन्न भुज क्रम से ५ और ८ इञ्च हैं और उनका अंतर्गत कोण ३०° का है तो क्षेत्रफल और सब कर्ण बताओ ॥

३४—त्रिभुज अ ब स में अगर अ=२, ब=३, स=४, तो हर एक मिडियन की लंबाई ६ स्थान दशमलवों तक दरयाफ्त करो ॥

३५—उन त्रिभुजों का क्षेत्रफल निकालो जिनकी भुज नीचे लिखी हैं

(१) म^{२} + न^{२}, म^{२} — न^{२}, २ म न

(२) प क (अ^{२} + श^{२}), अ श (प^{२} + क^{२}),
(प श + क अ) (प अ – क श)

(३) (२ अ + १) (अ + १)–३, २ (अ^{२} + १), ५ अ

३६—एक त्रिभुज का आधार १०० गज़ है और आधार पर के कोण ६० व ९० अंश के हैं, भुजों को निकालो ॥

३७—एक त्रिभुज की भुजाएं ६१०·५, ६२९२ और ८७६७ हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल और उसके भीतर और बाहर बने हुए वृत्तों के अर्धव्यास बताओ ॥

३८—उस त्रिभुज के कोणों को बताओ जिसकी भुजों का आपस में सम्बन्ध १, २, √३ है ॥

३९—एक त्रिभुज की भुज ३९, ४१ और ५० हैं, क्षेत्रफल निकालो ॥

४०—एक त्रिभुज का आधार १६ है और बाक़ी दो भुजों का जोड़ २० और शीर्ष कोण से खींची हुई आधार को २ बराबर भागों में काटनेवाली रेखा ९ है, भुजों को बताओ ॥

४१—एक त्रिभुज की भुज ५०, ७८ और ८० हैं तो इसके तीनों लंबों की लंबाई निकालो ॥

४२—दो दिए हुए समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज क्रम से २४·७ और १५२·६ हैं तो उस समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज बताओ जिसका क्षेत्रफल दिए हुए त्रिभुजों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है ॥

४३—एक त्रिभुज की भुज २, १७, १८ है, क्षेत्रफल बताओ ॥

४४—एक समत्रिबाहु त्रिभुज की भुज निकालो जब कि उस का क्षेत्रफल ४३३० वर्ग फ़ीट है ॥

४५—त्रिभुज की एक भुज १५, १७, १९ हैं, क्षेत्रफल निकालो ॥

४६—एक त्रिभुज की भुज ११९, १२०, १६९ हैं; इस भुज पर जिसकी लंबाई १६९ है, सन्मुख के कोण से लंब डाला गया है, तो इस भुज के दोनों खंडों का आपस में संबन्ध दरयाफ्त करो ॥

४७—अ ब स त्रिभुज में अ = ७८, ब = ८२, स = १००, क्षेत्र-फल निकालो ॥

४८—एक त्रिभुज की भुज ११४, १०१, २५ हैं, तो क्षेत्रफल बताओ ॥

४९—एक त्रिभुज की भुज क्रम से ८४, ९६, १०८ फ़ीट हैं; सबसे बड़ी भुज पर सन्मुख के कोण से लंब डाला गया है, तो इसके खण्ड को निकालो ॥

५०—एक त्रिभुज की भुज ३·३, ४·४, ५·५ हैं, तो उस लंब की लम्बाई दरयाफ्त करो जो पहिले दोनो के काटने के बिन्दु से तीसरी पर डाला गया है ॥

५१—अ ब स त्रिभुज में अ = ७, ब = ८, स = ९, तो कुल मिडि-यन दरयाफ्त करो ॥

५२—एक त्रिभुज की भुज १२५, १२३ और ६२ हैं; क्षेत्रफल निकालो ॥

५३—एक त्रिभुज की भुज १८७, २०० और १२३ हैं; सबसे छोटे लम्ब की लम्बाई बताओ ॥

५४—एक समषट्भुज क्षेत्र, जिसके कोण के बिन्दुओं पर क़बज़ें लगे हैं, झुका देने से एक समत्रिबाहु त्रिभुज के रूप का हो जाता है, तो इन दोनो शकलों के क्षेत्रफलों का सम्बन्ध और उन-के भीतर खींचे हुए वृत्तों के क्षेत्रफलों का सम्बन्ध भी दरयाफ्त करो ॥

५५—एक समद्विबाहु त्रिभुज की भुज, १५, १५ व २६ हैं और आधार २६ प विन्दु पर दो खण्डों, ५ व २१, में बिभाग किया गया है, तो शीर्ष से प तक की दूरी दरयाफ्त करो ॥

५६—तीन वृत्त जिनके अर्धव्यास क्रम से ६, ७ व ८ फ़ीट हैं, एक दूसरे को छूते हैं तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जो उनके केन्द्रों के मिलाने से बनता है॥

५७—एक त्रिभुज की भुज २८७, १००० व १०२३ हैं, भीतर बने हुए वृत्त का अर्धव्यास बताओ॥

५८—उस वृत्त का अर्धव्यास क्या है जो एक समत्रिबाहु त्रिभुज पर बनाया गया है जिसका क्षेत्रफल १०० वर्ग फ़ीट है॥

५९—७०० फ़ीट ऊंचे किसी पहाड़ की चोटी पर खड़ा होने से एक आदमी को समुद्र के दूसरे पार १४०० फ़ीट ऊंचे किसी दूसरे पहाड़ की चोटी मात्र आकाश में कुछ कुछ दिखाई देती है; बताओ कि दोनों पहाड़ आपस में कितने दूर हैं और उस नियम को भी सिद्ध करो जो यहां काम में लाओगे॥

६०—एक त्रिभुज के लम्ब २०५०, १५९९ और १९५० हैं; साबित करो कि भुजों का सम्बन्ध क्रम से ३९, ५० और ४१ हैं और क्षेत्रफल भी बताओ॥

६१—एक त्रिभुज की भुजाएं १९, २७ और ३४ हैं तो त्रिभुज के भीतर के वृत्त के केन्द्र की दूरी हर एक कोण से निकालो॥

६२—एक त्रिभुज की भुज १·१३, २·३८ और २·२५ फ़ीट हैं, तो त्रिभुज के भीतरी और बाहरी वृत्तों का अर्धव्यास बताओ॥

६३—अ = ४२·१२, व = ९०·०९ स = ९९·४५ तो अ दरयाफ्त करो॥

६४—अ = ९१, व = ३१२, स = ३२५, तो अ और भुज ३२५ पर सन्मुख के कोण से लम्ब दरयाफ्त करो॥

६५—दो वृत्तों की परिमित के जोड़ व अंतर का सम्बन्ध २५ : १६ है और उनके क्षेत्रफलों का अंतर उस वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका अर्धव्यास ४ फ़ीट है तो वृत्तों के अर्धव्यास को बताओ॥

६६—अगर दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को क्रम से $\triangle$ और $\triangle'$ से ज़ाहिर करें और दूसरे त्रिभुज के लंब $\frac{१}{\text{पहिले त्रिभुज के भुजों}}$ के बराबर हो तो सिद्ध करो कि $\triangle\triangle' = \frac{1}{4}$ (युक्ति ९६ देखो)

६७—बतलाओ कि एक बर्ग के कोने किस प्रकार काटे जांय कि जो आकार बाक़ी रह जाय वह एक समअष्टभुज हो ॥

६८—यदि अ = २००, व = १८७, स = १२३, तो अ बताओ ॥

६९—१०० मील दूरी से समुद्र में ६६०० फ़ीट ऊंचे पहाड़ की केवल चोटी देख पड़ती है तो पृथ्वी का व्यास बताओ ॥

७०—२० मील के फ़ासले से एक मीनार की चोटी आकाश में दिखाई देती है तो मीनार की उंचाई क्या है ॥

७१—एक वृत्त का व्यास बताओ जिसकी परिधि २४६·३६१४८७३९ है ॥

७२—एक त्रिभुज की भुज ५, ८ और १२ हैं तो उसके भीतरी और बाहरी वृत्तों के मध्य का क्षेत्रफल बताओ ॥

७३—एक त्रिभुज के लम्ब ३, ४ और ६ हैं, भुजों को बताओ ॥

७४—यदि अ = ५१, व = ७५, स = ७८, तो अ दरयाफ्त करो ॥

७५—एक त्रिभुज की भुज क्रम से दश गज़, २६ फ़ीट और २८ फ़ीट हैं तो उस पर बने हुए वृत्तका अर्ध व्यास निकालो ॥

७६—दो वृत्तों के अर्ध व्यास १ और ७ हैं और उनके केन्द्र की दूरी १० है तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई बताओ ॥

७७—एक वृत्त का अर्ध व्यास १० फ़ीट है। विन्दु प से। जो केन्द्र से १७ फ़ीट दूरी पर है, एक रेखा वृत्त को अ और ब में काटती हुई खींची गई है, तो सतह प अ और प ब दरयाफ्त करो ॥

७८—एक चाप में का कोण १३५° है तो वृत्तखंड की चाप का सम्बन्ध सम्पूर्ण परिधि से क्या है ?

७९—एक समकोण त्रिभुज का कर्ण १२·५ है और भुजों का योग १७·५ है तो अ का मोल बताओ ॥

८०—दो वृत्तों के अर्ध व्यास क्रम से ४·२५ और १·७५ फ़ीट हैं और उनके केन्द्रों की दूरी ६·५ फ़ीट है, तो सीधी और बेड़ी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं की लंबाई बताओ ॥

८१—दो समानान्तर जीवा क्रम से १२ व १६ मीटर हैं और उनकी दूरी दो मीटर है तो व्यास की लंबाई बताओ ॥

८२—वृत्त के केन्द्र से एक बिन्दु कितनी दूरी पर हो कि उस चाप जीवा के खंडों की सतह को जो इस बिन्दु में हो कर जाती है अर्ध व्यास के वर्ग से वही सम्बन्ध हो जो ५७६ को ६२५ से है (अर्ध व्यास = १० इञ्च) ॥

८३—दो वृत्तों के अर्धव्यास क्रम से १० फ़ीट व ८ गज़ हैं और उनके केन्द्रों का फ़ासिला २६ फ़ीट है तो उनके उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई निकालो ॥

८४—अगर अ = २५, व = ३९, स = ५६ तो क्षेत्रफल और अ और अ बताओ ॥

८५—एक वृत्ताकार खेत के चारों ओर एक बराबर चौड़ाई की राह बनी हुई है, और वह खेत के क्षेत्रफल का १/१६ भाग घेरती है, तो राह की चौड़ाई व खेत के अर्ध व्यास का मुक़ाबिला करो ॥

८६—एक वृत्त का व्यास ५० गज़ है तो एक बिन्दु से जो केन्द्र से २१ फ़ीट की दूरी पर है सबसे न्यून जीवा कितनी लंबी खींची जा सकती है ?

८७—एक जीवा के खंडों की सतह बताओ जो एक वृत्त के केन्द्र से जिसका व्यास १७० फ़ीट है ७३ फ़ीट दूर बिन्दु में से होकर खींची गई है ॥

८८—एक वृत्त जिसका अर्ध व्यास १० फ़ीट है दिया हुआ है, तो उस जीवा के खंडों की सतह बताओ जो ऐसे बिन्दु में हो कर जाती हैं जो केन्द्र से ७·३३ फ़ीट दूरी पर है ॥

८९—उस वृत्त खंड चाप के कोन को बताओ जिसका वृत्तखंड चाप वृत्तका चौथा भाग है ॥

९०—त्रिभुज अ व स में अ=२६, व=२५, स=१७ ; अ दरयाफ्त करो ॥

९१—एक वृत्त का व्यास ७९२० मील है ; एक विन्दु परिधि से न फ़ोट बाहर लिया गया है तो साबित करो कि इस विन्दु से परिधि तक खींची हुई स्पर्श रेखा की लंबाई $\frac{\sqrt{३न}}{\sqrt{२}}$ मील है ॥

९२—एक समकोण त्रिभुज के कुल भुज ६० हैं और भीतर बने हुए वृत्त का अर्ध व्यास ५ है तो भुजों को बताओ ॥

९३—एक त्रिभुज की भुज २५, ३९ और ४० हैं तो इसमें और इस पर के बने हुए वृत्तों के अर्ध व्यास क्या होंगे ?

९४—एक समद्वादश भुज क्षेत्र एक वृत में बनाया गया है जिसका अर्ध व्यास ३०.५ इञ्च है; क्षेत्रफल क्या होगा ?

९५—एक वृत्त में बने हुए समत्रिबाहु त्रिभुज की भुजों को निकालो जब कि व्यास $१०\sqrt{३}$ है ॥

९६—अगर अ=१००, व=८२, स=७८, अ बताओ ॥

९७—दो समानान्तर जीवाओं की लंबाई २ अ और २ व हैं और उनके मध्य की दूरी स है ; अ क्या है ?

९८—अ=२५.२, व=५३.९, त=५९.५ ; अ क्या है ?

९९—एक त्रिभुज की तीनों भुज २३.४, २५.२ और २७ हैं तो अ दरयाफ्त करो ॥

१००—एक त्रिभुज के तीनों लंब १८.२, १९.५ और २१ हैं ; क्षेत्रफल निकालो ॥

१०१—एक त्रिभुज की भुज ८५, २०४, २२१ हैं, त्रिभुज पर के वृत्त का व्यास बताओ ॥

१०२—दो वृत्तों के अर्ध व्यास ८४.५ और ९७.५ हैं और उनके केन्द्रों की दूरी ९१ है; उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई निकालो ॥

१०३—एक त्रिभुज की भुज १४३, १३२ और ५५ हैं तो अ बताओ।

१०४—यदि एक वृत्तखंड का चाप कुल परिधि का १/६ भाग हो तो वृत्तखंड में के कोण का परिमाण क्या है?

१०५—एक त्रिभुज की भुज ११२, ४४१ और ४५५ हैं तो उस लंब को दरयाफ्त करो जो भुज ४४१ पर सन्मुख के कोण से डाला गया है॥

१०६—एक त्रिभुज की भुजाएं ४, १३, १५ फ़ीट हैं तो उन लंबों की लंबाई बताओ जो त्रिभुज पर बने हुए वृत्त के केन्द्र से भुजों पर डाले गए हैं॥

१०७—अगर अ=२१, ब=८९, स=१००, अ दरयाफ्त करो और त्रिभुज में बने हुए वृत्त के केन्द्र की दूरी कोन के बिन्दुओं से भी निकालो॥

१०८—एक त्रिभुज की दो भुज ५० और २४ फ़ीट हैं और उनका अन्तर्गत कोन एक समषट् भुज क्षेत्र के कोन का आधा है, तो क्षेत्रफल बताओ॥

१०९—एक समकोण त्रिभुज की भुज ३ और ४ हैं तो कर्ण के उन खंडों को बताओ जो सामने के शीर्ष से उस पर डाले हुए लंब से बनते हैं॥

११०—एक समकोण त्रिभुज की भुज ८५ और २०४ हैं तो कर्ण और समकोण से कर्ण पर का लंब दरयाफ्त करो॥

१११—एक त्रिभुज की दो भुजाएं १७०७·३७४२४ और १०६७·१०८९ हैं और उनके मध्य का कोन एक समत्रिबाहु त्रिभुज के कोण का आधा है; क्षेत्रफल क्या होगा?

११२—एक समकोण त्रिभुज में समकोण बनाती हुई भुज ५६·८८ और २३·७ हैं तो बताओ कि समकोण से कर्ण पर का लंब और कर्ण के खंड जो इस लंब से होते हैं, क्या होंगे॥

११३—एक त्रिकोण खेत की भुजाएं १५ पर्च ४½ गज़, १८ पर्च १ गज़ और २६ पर्च हैं, तो त्रिभुज के भीतर बने हुए एक वर्गाकार तालाब के भुज की लम्बाई बताओ जिसकी एक भुज त्रिभुज की सबसे बड़ी भुज पर पड़ती है ॥

११४—साबित करो कि तीन क्रमागत संख्या, जिनसे एक समकोण त्रिभुज की भुजों को ज़ाहिर कर सकते हैं, सिर्फ़ ३ और ४ और ५ हैं ॥

११५—उन कुल रीतिओं को सिद्ध करो जिनमें कि कई एक समबहुभुज क्षेत्र के कोण एक बिन्दु के चारों ओर की जगह को ढक लेंगे ॥

११६—किसी वृत्त में, जिसका अर्धव्यास १०० फ़ीट है, २४ भुज का एक समबहुभुज क्षेत्र बना है। इस क्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ ॥

११७—एक लोहे की चादर वर्गाकार का क्षेत्रफल २५२८१ वर्ग इञ्च है तो बड़े से बड़े गोल पत्तर का क्षेत्रफल क्या होगा जो चादर में से काटा जा सकता है ॥

११८—एक कमरा २० फ़ीट लम्बा, १२ फ़ीट चौड़ा और ९ फ़ीट ऊंचा है, तो उस रस्सी की लम्बाई बताओ जो फ़र्श के किसी कोण से भीतरी छत के सबसे दूर के कोन तक खींची जा सकती है ॥

११९—चापजीवा १२ फ़ीट और उंचाई ३ फ़ीट है तो वृत्त की परिधि मालूम करो ॥

१२०—एक त्रिभुज की भुज १३, १४, १५ के सम्बन्ध में हैं और परिमित ७० गज़ है, क्षेत्रफल निकालो ॥

१२१—टेनरीफ पर्वत की चोटी की उंचाई १२००० फ़ीट है तो समुद्र में किसी जहाज़ पर से कितनी दूर तक इसकी चोटी दिखाई देगी ? (पृथ्वी का अर्धव्यास = ४००० मील) ॥

१२२—एक समद्विबाहु त्रिभुज की हर एक भुज १० फ़ीट है और आधार पर का कोन ३० अंश है तो आधार और उंचाई मालूम करो ॥

१२३—दो वृत्त जिनके अर्धव्यास क्रम से २०० और २१० फ़ीट हैं एक दूसरे को काटते हैं और उनके केन्द्रों की दूरी २९० फ़ीट है तो उस उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई और उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल जो केन्द्रों को वृत्तों के काट के बिन्दुओं से मिलाने से बनता है, निकालो ॥

१२४—एक रस्सी दो बराबर वृत्तों के गिर्द, जो एक दूसरे को बाहरी ओर छूते हैं, बंधी है; रस्सी के भीतरी क्षेत्रफल को बताओ (अर्धव्यास = १० फ़ीट) ॥

१२५—एक सीढ़ी २५ फ़ीट लम्बी एक दीवार पर जिसका आधार उस दीवार से ७ फ़ीट पर है रखी गई है; कितनी दूर सीढ़ी का आधार हटाया जावे कि इसका सिरा उसका आधा नीचे हो जावे जितना कि इसका आधार हटाया गया है ॥

१२६—एक अष्टभुज घेरे की चार दीवारों का ख़र्च २ आना ६ पाई प्रत्येक फ़ुट के हिसाब से ७५) है तो फ़ी वर्ग गज़ २ आना के हिसाब से इसकी सतह पर घास जमाने का क्या ख़र्च पड़ेगा ?

१२७—एक वर्ग का भुज १६ फ़ीट है और इसके कोनों को काट कर उसको समअष्टभुज के रूप का कर दिया है तो इस अष्टभुज का क्षेत्रफल मालूम करो ॥

१२८—एक समत्रिबाहु त्रिभुज और वर्ग का क्षेत्रफल बराबर है तो उनके परिमित का मुक़ाबला करो ॥

१२९—एक समकोण आयत किसी वर्ग से ४ इञ्च बड़ा है और २ इञ्च चौड़ाई में कम है, लेकिन क्षेत्रफल दोनों का बराबर है तो वर्ग की भुज निकालो ॥

१३०—१८ इञ्च वर्ग की कागज़ को दफ़ती से अगर बड़े से बड़ा वृत्त छांट लें तो दफ़ती का कितना भाग बेकाम जायगा ?

१३१—रेखागणित अध्याय ४ के शकल दश में जो सम-द्विबाहु त्रिभुज बनाया गया है इसके हर एक कोन को अंश में लाओ ॥

१३२—एक आनन्द बाग़ के बीच में एक गोल तालाब है जिसका घेरा ८८० गज़ है; यदि यह बाग़ वर्गाकार हो और इसका क्षेत्रफल २० एकड़ हो तो उन रास्तों की लम्बाई बताओ जो बाग़ के हर एक कोन से उस तालाब के तट तक पहुंचते हैं ॥

१३३—एक चतुर्भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ जिसके कर्ण ५० व ७५ फ़ीट हैं और जो एक दूसरे के साथ समकोण बनाते हैं ॥

१३४—एक गाड़ी के दोनों पहिए जो हर एक ४ फ़ीट ऊंचे हैं एक मण्डल के चारों ओर घूमने में इस प्रकार चलते हैं कि बाहरी पहिया ३ बेर घूमता है जब कि भीतरी पहिया २ बेर, और उनका एक दूसरे से अन्तर ५ फ़ीट है तो हर एक की लम्बाई क्या है? इस प्रश्न में कोई व्यर्थ निर्दिष्ट है या नहीं ?

१३५—तीन वर्गों के भुज क्रम से ६, ८ और २४ फीट हैं तो उस वर्ग की भुज मालूम करो जिसका क्षेत्रफल इन तीन वर्गों के क्षेत्रफल के बराबर हैं; कैंची से दफ़ती काट कर ऐसे वर्ग बनाकर प्रश्न को सिद्ध करो ॥

१३६—नीचे दिए हुए निर्दिष्टों के सहारे से वृत्त का व्यास मालूम करने का नियम बयान करो ॥

(१) चाप का शर और चाप की जीवा ।

(२) लम्बाई उन तीन सम्पात रेखाओं की जो अपने काट के विन्दुओं के मध्य में स्थित हैं । (युक्ति ८१)

एक जीवा से जो ७२० है एक वृत्त की परिधि दो चापों में भाग हो गई है और व्यास १६८१ है तो छोटे चाप का शर और बड़े चाप के अर्ध की जीवा मालूम करो ॥

१३७—एक वृत्ताकार कटिबन्ध की दो समानान्तर जीवाएं ६ और ८ फ़ीट हैं और वृत्त का अर्धव्यास ५ फ़ीट है तो कटिबन्ध की चौड़ाई निकालो ॥ (इस प्रश्न में दो उत्तर होते हैं)

१३८—हर एक वृत्त के व्यास को परिधि का $\frac{११३}{३५५}$ मान कर बताओ कि वृत्त के क्षेत्रफल के कितने भाग में एक आयत उसके भीतर ११२ लम्बा व १५ चौड़ा बन सकता है ॥

१३९—दो वृत्त जिनके अर्धव्यास क्रम से २९·७ और ३०·४ इञ्च हैं, परस्पर समकोण पर काटते हैं, तो उनके केन्द्रों का अन्तर बताओ ॥

१४०—एक विषम चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा जिसकी समानान्तर रेखाएं ७२ व ३८$\frac{२}{३}$ फ़ीट हैं और शेष दूसरी भुजाएं २० और २६$\frac{२}{३}$ फ़ीट हैं ?

१४१—दो वृत्तों के अर्धव्यास क्रम से ३६ व ६१ फ़ीट हैं और उनके केन्द्रों के मध्य की दूरी ६५ फ़ीट है तो उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई बताओ ॥

१४२—एक समकोण त्रिभुज का कर्ण ५० फ़ीट है और उसके भीतरी वृत्त का व्यासार्ध १० फ़ीट है तो भुजों को मालूम करो ॥

१४३—एक वृत्त का अर्धव्यास ५० फ़ीट है तो इसके भीतर और बाहर बने हुए समषट् भुज क्षेत्रों का क्षेत्रफल बताओ ॥

१४४—एक वृत्त का व्यासार्ध १ फ़ुट है और इसमें समद्वादश भुज क्षेत्र बनाया गया है, तो इसका क्षेत्रफल निकालो ॥

१४५—एक समकोण त्रिभुज की भुजों की परिमित ४५० फ़ीट है और उसके भीतर खींचे हुए वृत्त का व्यासार्ध ३० फ़ीट है तो भुजों को मालूम करो ॥

१४६—अगर एक समकोण त्रिभुज के मध्य का भुज कर्ण और तीसरी भुज के योग का आधा हो तो साबित करो कि भुजों में ३, ४ और ५ का सम्बन्ध है ॥

१४७—एक गोल बाट की चौड़ाई मालूम नहीं है, परन्तु उस रेखा की लम्बाई जो बाट के बाहरी परिधि की जीवा है और भीतरी परिधि की एक स्पर्श रेखा है, बराबर है २० फ़ीट के तो बाट का क्षेत्रफल बताओ॥

१४८—एक वर्ग की भुज १२ फ़ीट है, कर्ण के समानान्तर सरलरेखाओं से वर्ग ३ समान भागों में भाग हो गया है, तो समानान्तर रेखाओं के मध्य की लंब रूप दूरी क्या होगी?

१४९—दो सकेन्द्र घेरे के दरमियान जिनकी लंबाई २५ और १९ गज़ है एक सड़क बनाने का खर्च प्रत्येक वर्ग गज़ ६ आना के हिसाब से निकालो॥

१५०—एक चतुर्भुज क्षेत्र का कर्ण ५० और ६० गज़ है जो परस्पर को ३०° के कोण पर काटते हैं—क्षेत्रफल निकालो॥

१५१—एक समषट्भुज का छोटा कर्ण २√३ फ़ीट है तो बताओ कि दूसरा कर्ण और भुज और क्षेत्रफल क्या होंगे?

१५२—एक वर्ग की भुज १०० फ़ीट है और इसके कोण इस प्रकार काटे गए हैं कि उससे एक समअष्टभुज बन गया है; अष्टभुज का क्षेत्रफल मालूम करो और यह भी सिद्ध करो कि समअष्टभुज का भुज = (√२—१) × भुज वर्ग की॥

१५३—एक समअष्टभुज का क्षेत्रफल १०८६·४ वर्ग फ़ीट है तो एक भुज की लंबाई बताओ॥

१५४—एक आयताकार कमरा २१ फ़ीट ७ इञ्च लंबा १५ फ़ीट चौड़ा और १० फ़ीट ऊंचा है और उसमें दो द्वार ७′ × ३′ हैं व दो खिड़कियां ५′ × ३′ हैं जिनके ऊपरी भाग अर्धवृत्त हैं और एक ओर दीवार में बनी हुई एक अंगीठी ४′ × ३′ ६″ हैं तो दीवारों का क्षेत्रफल बताओ॥

१५५—एक वृत्त का अर्धव्यास ४·५ फ़ीट है तो इसके अंतर्गत और बाहरी समद्विबाहु के त्रिभुज क्षेत्रफल लाओ॥

१५६—साबित करो कि वृत्त के भीतरी द्वादश भुज क्षेत्र का क्षेत्रफल उसी वृत्त के बाहरी वर्ग के क्षेत्रफल का ३/४ है ॥

१५७—एक त्रिभुज की भुज १३ व १४ व १५ हैं; उसके हर एक मिडियन की लंबाई और लंबों की भी लंबाई बताओ और साबित करो कि इसके संपूर्ण कोण न्यूण हैं ॥

१५८—एक गेंद खेलने के मैदान में १००० गज़ लंबा घेरा बनेगा, तो बताओ कि ज्यादः से ज्यादः कितनी ज़मीन घिर जायगी ॥

१५९—एक वृत्त में जिसका अर्धव्यास ३ इञ्च है एक सम-द्वादश भुज क्षेत्र बनाया गया तो इसका क्षेत्रफल वर्ग फ़ीट में निकालो ॥

१६०—एक त्रिभुज के भुज १७ व १९ हैं और इनका अंतर्गत कोण एक समत्रिबाहु त्रिभुज के कोण का आधा है तो क्षेत्रफल मालूम करो ॥

१६१—एक समकोण के शकल की अंटा खेलने के मेज़ की लंबाई व चौड़ाई क्रम से ७२ व ६५ इञ्च है; एक अंटा उस मेज़ के सतह के किसी बिन्दु से उछल कर मेज़ के चारों ओर से एक बार पलटा खाकर उसी बिन्दु पर लौट आता है तो उस राह की लंबाई बताओ जिसको अंटा ने तै किया। याद रहे कि किसी भुज पर पलटा खाने में इस अंटा के राह से उसी भुज के साथ पलट जाने के पहले और पीछे बराबर कोण बनाते हैं।

१६२—अगर तीन दी हुई संख्या एक समकोण त्रिभुज के भुजों को बतावें तो उन संख्याओं को बराबर स्थान दशमलव तक घटाने से जो संख्या मिलती है वह एक समकोण त्रिभुज के भुजों को बताती हैं ॥

१६३—अगर किसी त्रिभुज का आधार अब, म + न बराबर भागों में द विन्दु पर भाग हुआ हो जिनमें से अ द में न और ब द में म भाग रहे तो साबित करो कि यदि शीर्ष स को द से

मिलाया जावे तो म × अ स^{२} × न × ब स^{२} = (म + न) × द स^{२} + म × अ द^{२} + न × ब द^{२}

१६४—एक समकोण क्षेत्र का क्षेत्रफल १ एकड़ है और परिमित ३२२ गज़ है तो भुजाओं की लंबाई निकालो ॥

१६५—अ ब स त्रिभुज में अ ब = १००, ब स = १७ और कोण अ ब स एक समत्रिबाहु त्रिभुज के कोण का आधा है तो क्षेत्रफल बताओ ॥

१६६—एक त्रिभुज की भुज ·९ और १·२ और १·८ हैं तो भुज १·८ के खण्ड जो उस पर लंब डालने से होते हैं बताओ ॥

१६७—एक त्रिभुज का आधार १० फ़ीट लंबा है और उसकी आसन्न भुजों की अर्धक रेखाएं क्रम से ८ फ़ीट और ९ फ़ीट हैं तो दोनों भुज और तीसरी अर्धक रेखा को एक स्थान दशमलव तक लाओ ॥

१६८—एक समकोण त्रिभुज में समकोण के पास की भुजाएं ३६ और ७७ हैं तो समकोण से कर्ण पर का लंब मालूम करो ॥

१६९—अगर समकोण त्रिभुज का कर्ण ·३५ और एक भुज ·२ हो तो समकोण से आधार पर के लंब को ३ स्थान दशमलव तक निकालो ॥

१७०—एक त्रिभुज की भुज १४, २० और २४ हैं तो भुजों की अर्धक रेखाओं को २ स्थान दशमलव तक मालूम करो ॥

१७१—अ स एक वृत्तका व्यास और उसी वृत्त के भीतर बने हुए चतुर्भुज क्षेत्र अ ब स द का कर्ण है, यदि अ ब = ३०, ब स = ४०, स द = १४, तो अ द और चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ ॥

१७२—एक समकोण की परिमित ९० है और उसके भीतरी वृत्त का अर्ध व्यास ४ है; प्रत्येक भुज बताओ ॥

१७३—एक बैठका एक समषट्भुज के रूप में है जिसकी भुज १६ फ़ीट और उंचाई २० फ़ीट है तो ४) रुपया फ़ी ५० वर्ग

फ़ीट के हिसाब से चटाई बिछाने में और फ़ी वर्ग फ़ीट ५ आने के हिसाब से दीवारों पर रंग फिरवाने में क्या ख़र्च पड़ेगा ?

१७४—एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर समकोण से लंब डाला गया है जो ८१०·९४८९२३०७६ है और एक भुज ११८४ है तो दूसरी भुजों को निकालो ॥

१७५—एक खेत चतुर्भुजाकार है जिसकी चारों भुज क्रम से ११९, १६९, ३९१ व ४०९ पर्च हैं और कर्ण जो पहिले दो और पिछले दो भुजों का उभयनिष्ठ आधार बनाता है, १२० पर्च है तो इसका क्षेत्रफल एकड़, रोड, पर्च में लाओ ॥

१७६—एक त्रिभुज की भुज २२, ३० और ३६ हैं तो दो स्थान दशमलव तक उन रेखाओं की लंबाई निकालो जो त्रिभुज के प्रत्येक कोण से सन्मुख के भुजों के मध्य विन्दु तक खींची गई हैं ॥

१७७—एक समकोण त्रिभुज की भुज क्रम से ३ व ४ फ़ीट हैं तो ३ स्थान दशमलव तक उन चार रेखाओं की लंबाई निकालो जो समकोण को उन दो वर्गों के सामने के कोणों के मिलाने से पैदा होता है जो त्रिभुज के कर्ण पर बनाए गए हैं ॥

१७८—एक समअष्ट भुज का क्षेत्रफल बताओ जो एक वर्ग में जिसकी भुज $१०\sqrt{२}$ है बनाया गया हैं ॥

१७९—एक गंटरी जरीब पैमाने से आधी इञ्च अधिक लंबी है तो उस खेत का असली क्षेत्रफल क्या होगा जो इस बेसहा जरीब के नापने से ६८$\frac{३}{४}$ एकड़ आता है ॥

१८०—अगर एक त्रिभुज का आधार ५ फ़ीट और क्षेत्रफल २० वर्ग फ़ीट हो तो भीतर बने हुए वर्ग के भुज की लंबाई दरयाफ्त करो ॥

१८१—एक वर्ग खेत दो गज़ चौड़ी राह से घेरा हुआ है; खेत और राह के क्षेत्रफल मिलकर ५०१७६ वर्ग गज़ हैं, तो ३ आना वर्ग गज़ के हिसाब से राह पर कंकड़ बिछाने का ख़र्च निकालो ॥

१८२—एक त्रिभुज के लंब क्रम से ६, ७·२ और ९ फ़ीट हैं तो क्षेत्रफल और त्रिभुज के भुजों को निकालो ।

१८३—साबित करो कि पांच त्रिभुजों में जिनके भुजों के पैमाने (१) ६, ८, १० (२) ५, १२, १३; (३) ६, २५, २९; (४) ७, १५, २०, (५) ९, १०, १७ हैं; परिमित और क्षेत्रफल हर एक दशा में एक ही अंकों से ज़ाहिर किए जाते हैं ॥

१८४—एक खेत २४० हाथ लंबा और १८० हाथ चौड़ा है तो सिद्ध करो कि एक सड़क जो ६० हाथ चौड़ी है और जिसका आधा भाग चारों ओर खेत के भीतर पड़ता है खेत के आधे क्षेत्रफल को घेरती है ॥

१८५—एक दिए हुए वर्ग में सबसे छोटा वर्ग जो बन सकता है बनाओ। एक वर्ग में जिसकी भुज १० फ़ीट है सबसे छोटे बने हुए वर्ग की भुज निकालो (रेखाग० २-९ की सहायता से) ॥

१८६—वृत्त जिनके व्यासार्ध २५·२ और २७·५ इंच हैं, क्रम से इस प्रकार रक्खे गए हैं कि उनके केन्द्र १·५, २·३, २५·५, ३७·३, ४५·७, ५२·७, ५४·२ इञ्च दूरी पर हैं, तो हर दशा में इन वृत्तों की दशाओं का क्या सम्बन्ध होगा ॥

१८७—एक विन्दु एक वृत्त के केन्द्र से जिसका व्यासार्ध १० इञ्च हैं १४·७ इञ्च दूरी पर है तो सबसे छोटे रेखा की लंबाई मालूम करो जो विन्दु से वृत्त तक खींची जा सकती है ॥

१८८—एक अर्धवृत्त का व्यास ५२ है और उस लंब की लंबाई जो परिधि के किसी विन्दु से व्यास पर डाला गया है ४ $\sqrt{30}$ है, तो व्यास के दोनों खंडों को बताओ ॥

१८९—उस वृत्त का अर्धव्यास निकालो जो ऐसे दो वृत्तों के केन्द्रों और काट के विन्दुओं से गुज़रता है जिनके अर्ध व्यास क्रम से ९० और ४०० फ़ीट हैं ॥

१९०—उस सबसे बड़े से बड़े समतल भूमि की सूरत व क्षेत्रफल को बताओ जो एक मील रस्सी से घेरा जा सकता है ॥

तीसरा भाग

[जरीब और फील्डबुक]

पहिला प्रकरण

पैमाइश

१०७—पैमाइश (सरवेंग) उस विद्या का नाम है जिससे भूमि के किसी दिए हुए भाग का क्षेत्रफल मालूम कर सकते हैं और उसकी ठीक ठीक सरहद बांधकर नक़शे खींच सकते हैं।

१०८—किसी भूमि के नापने के दो उपाय हैं, (१) केवल जरीब यानी ज़ंजीर से, (२) ज़ंजीर और कोन नापने के यन्त्र से। इस छोटी किताब में हम लोग केवल जरीबी यानी ज़ंजीरी नाप का वर्णन करेंगे।

१०९—ज़मीन नापने के लिये दो तरह की ज़ंजीर काम में आती हैं। एक सौ फ़ीट लंबी होती है। दूसरी जो गंटरी जरीब कहलाती है, ६६ फ़ीट होती है। दोनों जरीब १०० कड़ियों में भाग किए होते हैं। गंटरी जरीब हिन्दुस्तान में माल के महकमें के पैमाइश में लगती है।

दूसरी जरीब से गंटरी जरीब में विशेष फ़ायदा यह है कि इससे नापने से ज़मीन का क्षेत्रफल जल्दी मालूम हो जाता है।

जैसे—१ वर्ग जरीब = ४८४ वर्ग गज़ = १०००० वर्ग कड़ी और एक एकड़ = १० वर्ग जरीब = ४८४० वर्ग गज़ = १००००० वर्ग कड़ी।

११०—जरीब से एक सीधी रेखा का नापना—जिस रेखा को नापना हो उसके दोनों किनारों हर पहिले झंडियां गाड़ दी जाती हैं। जरीब के दोनों किनारों को एक एक आदमी पकड़े रहता है। अगले के पास १० सूजे अथवा खूंटी होती हैं जिनका एक सिरा नोकीला और दूसरा छल्लेदार होता है।

अगला आदमी अपने बाएं हाथ में दश सूजे लेकर एक और अपने दहने हाथ में जरीब का एक छोर पकड़ कर रवाना होता है। पिछला आदमी रवानगी के स्थान पर जरीब के दूसरे छोर को पकड़ कर अगले आदमी को उस झंडी की सीध में करता है जो कि इस रेखा के दूसरी सीमा पर गड़ी है जिसका नापना ज़रूर है। तब अगला आदमी एक सूजा ज़मीन पर रख कर उसी सीध में दूसरी जरीब के लंबाई तक आगे बढ़ता है और पिछला आदमी उस सूजे के निकट आता है जो पहिले ज़मीन पर रक्खा गया है। फिर अगला आदमी दूसरा सूजा ज़मीन पर रख देता है और पिछला आदमी पहिले सूजे को उठा लेता है। इसी प्रकार काम जारी रहता है यहां तक कि अगला जरीब खींचने वाला अपने तमाम सूजों को ज़मीन पर रख चुकता है। इसी ढंग से जब कि दश जरीब पैमाइश हो चुकती है और फ़ील्डबुक नामी याद्दाश्त में यह लिख लिया जाता है, तो पिछला आदमी दश सूजों को अगले को वापस कर देता है, और यही काम बारम्बार किया जाता है जब तक कि दूसरे स्थान (मटाम) तक पैमाइश नहीं हो जाती है। सूजों के पिछली बार अदला बदला के उपरान्त जरीब की संख्या उतनीही होती है जितनी कि पिछले आदमी के हाथ में सूजों की संख्या। यह संख्या उतनी कड़ियों के समेत जो कि आख़िरी सूजे और दूसरे मटाम के दरमियान होता है और दश जरीबों के तबादले की संख्या भी जो फ़ील्डबुक में लिखी जा चुकी हैं मिलकर रेखा की सम्पूर्ण लंबाई चाही हुई ज़ाहिर करती है॥

उदाहरण—कल्पना करो कि सूजे ५ बेर बदले गए हैं और पिछले आदमी के हाथ में ६ सूजे हैं और रेखा का सिरा उस मेख़ से (सूजे) जो कि ज़मीन में अख़ीर बेर गाड़ी गई है ७५ कड़ी दूर है तो रेखा की कुल लम्बाई क्या है॥

कुल लम्बाई = ५००० + ६०० + ७५ = ५६७५ कड़ी

१११—आफ़सेट या लम्ब—जरीब के द्वारा नापने में जरीबी रेखा के दोनों ओर के वस्तुओं का स्थान उन लम्बरूप फ़ासलों से मालूम होता है जो कि उनके और जरीबी रेखा के मध्य में होते हैं। इन फ़ासिलों को आफ़सेट कहते हैं॥

इस प्रकार शकल १९ में यदि अ स ब इ द फ जरीबी रेखा हो तो अ अ, व व, इ इ और फ फ जो विन्दु अ, ब, इ, फ से जरीबी रेखा पर लम्ब डाले गए हैं उन बिन्दुओं के आफ़सेट कहाते हैं, जैसा कि युक्ति १४, २६, ३८ और ४२ में वर्णन किया गया है। उन हिस्सों के क्षेत्रफल जो कि जरीबी रेखा और यथा अनुक्रम आफ़सेट के दरमियान स्थित हैं त्रिभुज और समलम्ब के नियमों से दरयाफ़्त हो सकते हैं॥

११२—आफ़सेट बहुधा फ़ीता से नापा जाता है, परन्तु अगर आफ़सेट बहुत छोटा होता है तो वह आफ़सेट—स्टाफ़ (डन्डा आफ़सटी) के द्वारा जो १० फ़ीट लंबा होता है और जिसपर दरजे बने होते हैं—नापा जाता है॥

११३—फ़ीता के द्वारा किसी बाहरी विन्दु से आफ़सेट निकालने में नीचे दिए हुए या गणित के उपपाद्य से मतलब निकाल सकते हैं—किसी सरल रेखा और इसके बाहरी बिन्दु का सब से कम फ़ासला वह लम्ब है जो कि इस बिन्दु से रेखा पर डाला जाय॥

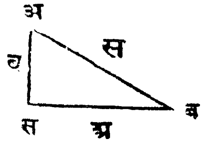
फ़ीते का एक सिरा बाहरी विन्दु पर बांधा जाता है और काफ़ी लम्बाई का फ़ीता लिया जाता है और दूसरा सिरा जरीब पर बार बार रक्खा जाता है, जब तक कि जरीब में एक ऐसा बिन्दु नहीं मालूम हो जाता जिसके: वाहरी बिन्दु से मिलाने में सब से कम लंबाई के फ़ीते को ज़रूरत होती है। इस रीति से आफ़सेट सहल से शीघ्र मालूम होता है और यही रीति आफ़सेट निकालने में नापनेवाले प्रायः काम में लाते हैं। आफ़सेट नापने में एक आला भी जिसको क्रास कहते हैं इस्तेमाल किया जाताहै॥

११४—जरीबी रेखा पर उसमें एक दिए हुए विन्दुसे लम्ब डालना (केवल जरीब की सहायता से यह क्रिया इस्तेमाल में आ सकती है)

मान लो कि ब स जरीबी रेखा है और स उस में एक विन्दु है, ब स के विन्दु स पर जरीब के मदद से लम्ब डालने की आवश्यकता है ॥

जरीब के एक सिरे को स विन्दु पर एक मेख में लगा दो और स से गिन कर आठवीं कड़ी को ब पर जो स से ४ कड़ी के अंतर पर है रखो। स से गिन कर ३ कड़ी के अंत को पकड़ो और जरीब को इस प्रकार खींचो कि स अ ब की सूरत की हो जावे। मगर इसका ख़याल रहे कि अ स और ब स ख़ूब तने हुए हैं तो स अ विन्दु स से ब स पर लम्ब हुआ ॥

शकल ४६



(रेखाग० १–४७)

यह समझना सहज है कि ३, ४ और ५ के जगह में ३०, ४० और ५० की लम्बाई ले सकते हैं ; विद्यार्थी को दूसरी संख्याओं के संकेत करने में कुछ कठिनाई न होगी ॥

दूसरा प्रकरण

फ़ील्डबुक या ख़सरा

११५—फ़ील्ड बुक या ख़सरा उस पुस्तक को कहते हैं जिसमें जरीबी माप के कुल क्रम लिखे रहते हैं। फ़ील्डबुक का हर एक पृष्ठ तीन ख़ानों में बंटा रहता है। जरीबी रेखा पर के सब माप बीच के ख़ाने में लिखे जाते हैं और जिन पर आफ़सेट या और कोई चिन्ह होता है। उसी जरीबी रेखा के दहिने तरफ़ के आफ़सेट की दूरी दहिने वाले ख़ाने में और बाएं ओर के आफ़सेट की दूरी बाएं ख़ाने में लिखी जाती है। यह लेख फ़ील्ड बुक

के आख़िर पृष्ठ के नीचे से आरम्भ किया जाता है और ऊपर की ओर बढ़ता जाता है ॥

११६—नीचे के उदाहरण में अ ब स द इ फ खेत की नाप एक ही जरीबी रेखा के नापने से जो स से फ तक फैली हुई है की गई है ॥

उदाहरण—नीचे के फ़ील्ड बुक से नक़शा बनाओ और क्षेत्र-फल बताओ ॥

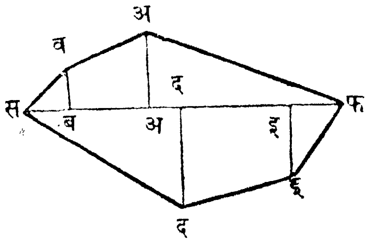
बिन्दु स और फ स्टेशन अर्थात् मोक़ाम या मटाम कहलाते हैं और फ़ील्ड बुक में □ के चिन्ह से ज़ाहिर किए जाते हैं ॥

बीच के ख़ाने में कुल फ़ासिले मोक़ाम स से दिए रहते हैं, बीच के किसी दूसरे जगह से नहीं ॥

	□ फ	तक
	२५०	
	२००	४५ इ तक
	१२०	७५ द तक
अ तक ५०	१००	
ब तक २५	३०	
	□ स	से

ऊपर के लिखने से ज़ाहिर है कि स ब = ३०, स अ = १००, या अ ब = ७०, स द = १२०, स इ = २००, या द इ = ८०, स फ = २५०, या इ फ = ५०, ब ब = २५, अ अ = ५०, द द = ७५, इ इ = ४५, अ फ = १५०

शकल ४७



अब क्षेत्रफल अ ब स द इ फ का = स ब ब + ब ब अ अ + अ अ फ + स द द + द द इ इ + इ इ फ

$= \frac{1}{2}$ { स ब × ब ब + अ ब × (ब ब + अ अ) + अ अ × अ फ + स द × द द + द इ × (द द + इ इ) + इ इ × इ फ }

$$=\frac{१}{२}\left\{\begin{matrix}३० \times २५ + ७० (२५+५०) + ५० \times १५० + १२० \times ७५ \\ + ८० \times (७५+४५) + ४५ \times ५०\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{१}{२}\left\{७५० + ५२५० + ७५०० + ९००० + ९६०० + २२५०\right\}$$

$$=\frac{१}{२} \times ३४३५० = १७१७५ \text{ वर्ग कड़ी ॥}$$

निरूपण—विद्यार्थी को इसमें ज्यादा आसानी होगी कि त्रिभुजों और समलम्बों के दूने क्षेत्रफलों को निकाल कर फल का आधा कर लेवें ॥

११७—युक्ति ११६ में खेत के एक कोन से दूसरे कोन तक के नापने और इस रेखा पर आफ़सेट गिराने से यह जताया गया है कि खेत अ ब स द इ फ की पैमाइश आसानो से हुई है, लेकिन ऐसे खेत प्रायः पाए नहीं जाते। बहुधा कुल क्षेत्रफल जिसकी पैमाइश करना चाहते हैं त्रिभुजों में भाग किया जाता है और इन त्रिभुजों की भुज सावधानी से जरीब से नापी जाती है और खेत के कुल कोन और झुकाव और उन वस्तुओं पर आफ़सेट डाले जाते हैं जिन स्थानों को नक़शे में ज़ाहिर करना चाहते हैं।

यह मालूम हो कि कुल सूरतों में लेख और हिसाब की वही रीति है जो युक्ति ११६ के उदाहरण में दिखलाई गई है।

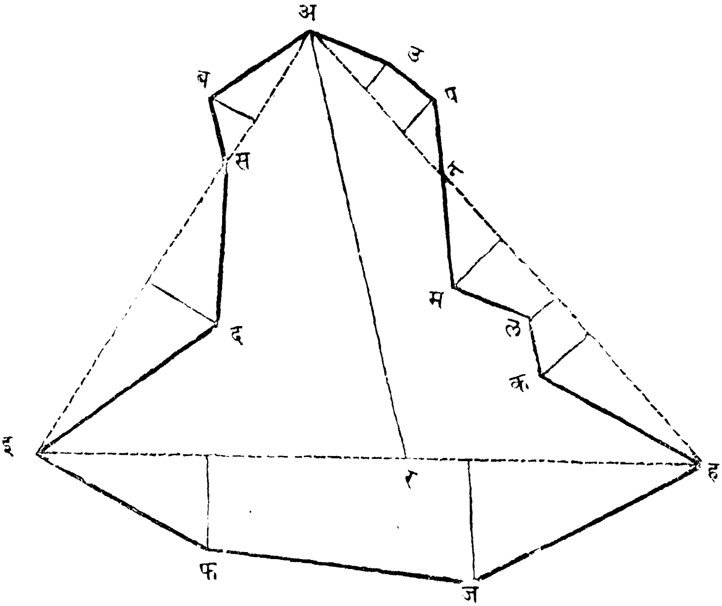
११८—साधक रेखा या परीक्षक रेखा (टेस्ट लाइन) किसी पैमाइश के शुद्धता के हेतु जो रेखा नापी जाती है उसको साधक रेखा या परीक्षक रेखा कहते हैं। खेत को त्रिभुजों में भाग कर देने के उपरान्त प्रत्येक त्रिभुज की भुजाएं नापी जाती हैं और ठीक ठीक जांच के लिये किसी भुज के एक निश्चित विन्दु से दूसरी भुज के निश्चय किए हुए विन्दु तक की सरल रेखा भी नाप लेते हैं (जैसे किसी शीर्ष कोन से सन्मुख के भुज के अर्धक विन्दु या उसके निकट की रेखा को नाप लेते हैं)। इस

रेखा से वह भूल पकड़ जाती है जो कि त्रिभुज के भुजों की पैमाइश में हो जाती हैं। साधक रेखा से पैमाइश की शुद्धता किसी दूसरी सहायता के बिना हो जाती है।

११६—उदाहरण—निम्न फ़ील्ड बुक से खेत का नक़शा बनाओ और क्षेत्रफल बताओ॥

	☐ इ तक	
०	४५०	
द ६०	३००	
	२००	० स
	१६०	४० व
	०००	
	☐ अ से	
	☐ अ को	
	४८१	०
	४१५	३० उ
	३६०	४० प
न ०	३२०	
म ६०	२४०	
ल ३०	१८०	
क ५०	१५०	
०	०००	
	☐ ह से	बाईं ओर
	☐ ह को	
	५८९	०
	४५०	८६ ज
	१२०	७० फ
	०००	०
	☐ इ से	

शकल ४८



शकल ४८ से एक खेत अ ब स द इ फ ज ह क ल म न प उ का नक़शा ख़ाम ज़ाहिर होता है और जो ऊपर के फ़ीलड बुक से मिलता है ॥

त्रिभुज अ इ ह की भुज ४५०, ५८९ और ४८१ हैं इसलिये इसका क्षेत्रफल १०६०२० होता है (युक्ति ३०)

युक्ति ११६ के अनुसार क्षेत्रफल इ फ ज ह $= \frac{१}{२} \left\{ १२० \times ७० + ३३० \times (७० + ८६) + १३९ \times ८६ \right\}$

$= \frac{१}{२} \left\{ ८४०० + ५१४८० + ११९५४ \right\}$

$=$ ३५९१७

इसी तरह से क्षेत्रफल ह क ल म न $= \frac{1}{2}$ { १५० × ५० + ३० (३० + ५०) + ६० (३० + ६०) + ८० × ६० }

$= \frac{1}{2}$ { ७५०० + २४०० + ५४०० + ४८०० }

= १००५०

और क्षेत्रफल न प उ अ $= \frac{1}{2}$ { ४० × ४० + ५५ (३० + ४०) + ६६ × ३० }

$= \frac{1}{2}$ { १६०० + ३८५० + १९८० }

= ३७१५

और क्षेत्रफल अ ब स $= \frac{1}{2}$ × २०० × ४० = ४०००

और क्षेत्रफल स द इ $= \frac{1}{2}$ × २५० × ६० = ७५००

अब क्षेत्रफल अ ब स द इ फ ज ह क ल म न प उ = क्षेत्रफल अ इ ह + क्षेत्रफल इ फ ज ह + क्षेत्रफल न प उ अ + क्षेत्रफल अ ब स — क्षेत्रफल ह क ल म न — क्षेत्रफल स द इ

= १०६०२० + ३५९१७ + ३७१५ + ४००० — १००५० — ७५००

= १३२१०२

अगर पैमाना कड़ी में हो तो

क्षेत्रफल = १ एकड़ १ रोड ११ पर्च लगभग

प्रश्न—साधक रेखा अ र जो अ से र तक पैमाइश की गई है (जहां इ र = २६६) २६६ है—क्या इससे यह साबित होता है कि त्रिभुज अ इ ह की भुजों के नापने में कोई भूल नहीं हुई है ? हां, क्योंकि उपपाद्य अपोलोनीयस्, युक्ति ३३ का दूसरे प्रमेय से—

२५३ × अइ^2 + ३३६ × अह^2 = २५३ × इर^2 + ३३६ × हर^2 + ५८९ × अर^2, जिससे

५८९ × अर^2 = २५३ (४५०^2 − ३३६^2) + ३३६ (४८१^2 − २५३^2)

= २५३ × ७८६ × ११४ + ३३६ × ७३४ × २२८

= ३६ × १९ × ११५३५१

या अर^2 = ३६ × ३७२१   इसलिये अर = ३६६

बीसवां अभ्यास

१—नीचे लिखे हुए फ़ील्डबुक से खेतों का चित्र यानी नक़शा खींचो और क्षेत्रफल बताओ ॥

(पैमाना लम्बाई कड़िओं में है)

(१)

	□ इ	
	३६०	
स ४०	२००	९० व
द १००	८०	
	□ अ	

(२)

	□ स	
	४००	
	३१०	२५ द
	२५०	६० इ
व४०	१००	
	□ अ	

(३)

	□ द	
	४५०	
स ८०	३४०	
	२१०	६० इ
७० व	१२०	
	□ अ	

(४)

	□ स	
	३३०	
	२५०	९५ द
व ७०	१३०	
	७५	४५ इ
	□ अ	

(५)

	□ इ	
	५००	
द १६०	४४०	
स११०	३२०	
	२४०	५० फ
व ६०	१००	
	□ अ	

(६)

	□ इ	
	१०२४	
द ९६	९७३	
स १४४	७४५	
	६००	२८०फ
व २२४	४९५	
	२५६	१००ज
	□ अ	

(७)

	□ व	
०	९६	०
४	८८	३
८	६७	८
७	५६	६
८	४०	७
	□ अ	

(८)

	□ व	
०	१००	
८	८१	
१२	६४	
१६	४९	
१२	३६	
१६	२५	
	□ अ	

(९)

	□ व	
६	३२	४
०	२९	२
५	१९	३
७	११	४
४	६	३
५	०	०
	□ अ	

२—नीचे लिखे हुए फ़ील्ड बुक से खेत का नक़शा खींचो और क्षेत्रफल बताओ—जरीबी रेखा खेत के भीतर हैं ॥

साधक रेखा स द को बताओ, द जरीबी रेखा अ व में हैं। अ व पर स से लंब को भी बताओ ॥

(१)

	अ □	
०	६३८	
४६	४६५	
३२	२४६	
०	०००	
	□ स	
	□ स	
०	४६२	
४५	३००	
३२	१५०	
०	०००	
	□ व	
	□ व	
०	७२५	
३२	५६५	
४०	४००	
२५	२५०	द
०	०००	
	□ अ	

(२)

	□ अ	
	१०६९	०
	१०००	३०
	९००	२०
	५००	३०
	०००	०
	□ स	
	□ स	
	१६२१	०
	१६००	२०
	१२००	५०
	८००	३०
	०००	०
	□ व	
	□ व	
	२१५२	०
	२०००	३०
	११८२	द
	६००	२०
	१००	१०
	०००	०
	□ अ	

३—नीचे के फ़ील्डबुक से जिसमें लम्बाई कड़ियों में दी हुई है खेत का नक़शा बनाओ और क्षेत्रफल को एकड़, रोड पोल में लाओ ॥

(१)

	□ अ	
	१५००	०
	११२५	३०
०	७५०	
३०	३७५	
०	०००	
	□ स	
	□ स	
०	१२००	
४०	९००	
	६००	०
	३००	४०
	०००	०
	□ ब	से दाहने ओर को
	□ ब	
	९००	□
	६००	२०
	३००	१०
	०००	०
	□ अ	

(२)

	□ अ	तक
	४६४	०
	३३२	५०
	□ स	
	□ स	
०	४२०	
३८	३२०	
	२४०	०
	१२४	२५
	□ ब से	बाईं ओर
	□ ब	
०	५७२	
२६	२३६	
	□ अ से	उत्तर की तरफ़

(३)

	४५० अ	०
	३५०	४०
	२००	०
	०	२५
	□ स	
०	२७० स	
६०	१८०	
	१००	०
	५०	४०
	०००	०
	□ व से	बाईं ओर
	३६० व	०
	२६०	२०
	१२०	३०
	०००	०
	□ अ से	उत्तर और पूर्व के कोन में चलो

(४)

	□ अ	
०	५२५०	
४०	४५००	
६०	३५००	
५०	२५००	
०	००००	
	□ स	
	□ स	
०	३४६०	
२०	३२००	
३०	३०००	
२०	२५००	
१०	१५००	
०	००००	
	□ व से	दहिने चलो
	□ व	
	२२१०	०
	२०००	२०
	१५००	३०
	१०००	२०
	००००	०
	□ अ	

४—अभ्यास ३ में यदि दाहने के बदले में बाएं और बाएं के स्थानों में दहिने पड़ें तो उसके चारों खेतों के नक़शों और क्षेत्रफलों में क्या अदल बदल होगा ॥

५—खेतों के पैमाइश में आफ़सेट के भिन्न भिन्न प्रयोगों की व्याख्या करो ॥

६—नीचे के फ़ील्ड बुक से खेतों का नक़शा बनाओ और उनके क्षेत्रफलों को बताओ, परन्तु यह याद रक्खो कि स्थान पर पहुंच कर बाईं ओर मुड़ जाओ और (१) में व से अ स पर का लम्ब १६० है और द से अ स पर का लम्ब ३२२ है और इ से अ द पर का लम्ब लगभग १४६ है; और (२) में उ से प क पर का लम्ब १८४ है और श से प क पर का लम्ब २९६ है और ज्ञ से प श पर का लम्ब अनक़रीब २०० है ॥

(१)

☐ ह	
५४०	
☐ ख	
☐ स	
६००	
☐ ख	
☐ ख	
३२०	०
००१	०
☐ छ	
☐ छ	
३००	०
२०१	२०
१६०	०
१००	२२
०००	०
☐ द	
☐ द	
३६०	०
३४०	१६
३००	२२
२१०	१०
१६०	०
०००	०
☐ स	
☐ स	
३३०	०
३२०	४०
१४०	१०
१००	३६
०००	०
☐ व	
☐ व	
३५०	०
२१०	४०
१२०	२०
०००	०
☐ ख	

(२)

☐ घ	
४८१	
☐ प	
☐ फ	
५०१	
☐ प	
☐ प	
३५०	०
२००	३२
१४०	३१
० ० ०	०
☐ ज	
☐ ञ	
२८२	०
२१०	२६
११०	०
० ० ०	०
☐ घ	
☐ घ	
३२१	०
२५०	०
२०१	२४
९०	२०
४०	०
० ० ०	०
☐ क	
☐ क	
३००	०
१७१	४१
१००	२१ और २४
६०	०
० ० ०	०
☐ उ	
☐ उ	
३२१	०
२६१	२६
२३०	०
२००	०
१४०	०
१००	०
० ० ०	
☐ प	

०
४०
०

७—(अ) रेखागणित की सहायता से एक त्रिभुज की भुजों में के निश्चित विन्दुओं को मिलाने वाली साधक रेखा की लम्बाइयों के निकालने की रीति दिखलाओ ॥

(ब) नीचे के खेत का क्षेत्रफल एकड़ में और साधक रेखा म न की लम्बाई निकालो ॥

	☐ अ	
	३५१०	०
न	१३४०	
	१०००	४०
	००००	०
	☐ स	
	☐ स	
	२९८०	०
	१९८७	४०
	००००	०
	☐ ब	
	☐ ब	
	३१२०	०
	२९७८	४०
म	१५००	
	००००	०
	☐ अ	

८—नीचे के फ़ील्डबुक से नक़शा बनाओ और खेत अ ब स द इ का क्षेत्रफल निकालो ॥

	☐ द	
	११६५	
	९१२	१६८ इ
स ३०८	४१५	
	☐ ब	दाहने ओर
	☐ ब	
	११९५	
	२९३	२३२ इ
	☐ अ	

९—खेत अ ब स का नक़शा खींचो और त्रिभुजाकार बाग़ ल म न का क्षेत्रफल घटाकर उसका क्षेत्रफल निकालो और जब कि जरीबी रेखा अ स पर से ल म न कोन के आफ़सेट क्रम से १३, ७९ और ११३ हैं और जरीबी रेखा ब स पर से ल म न कोन के आफ़लेट क्रम से १५ और ८६ और १२४ हैं (कुल जरीबी रेखा खेत के भीतर हैं)

(१)

	□ अ
०	२२५
३०	१८०
०	०००
	□ स

	□ स
०	२७२
४०	१६०
०	०००
	□ ब

	□ ब
०	३५३
६०	१००
०	०००
	□ अ

(२)

	□ अ
०	३६८
७५	२००
०	०००
	□ स

	□ स
०	६२५
९०	४५०
०	०००
	□ ब

	□ ब
०	७२५
५०	३६०
०	०००
	□ अ

१०—नीचे दिए हुए माप से खेत अ ब स द इ फ ज का नक़शा बनाओ और क्षेत्रफल मालूम करो—रेखा ग० की सहायता से मुक़ाम फ की जगह निकालने की सोपपत्ति रीति बताओ (शकल खींचे जाने पर क्षेत्रफल ज़बानी बता सकते हैं)

	□ द	
	१३२०	
	७३७	७२ इ
ज १२८	२५१	
	□ फ	
	□ ज	
	१४४५	
द ४००	३७९	
	□ स	
	□ स	
	१७९०	
च १२४	१३२९	
	३४७	७६ ज
	□ म	

तीसरा प्रकरण

मिश्रित साध्य

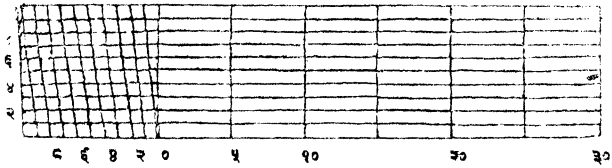
१२०—स्केल(यन्त्र) ऐसे दूरी के बराबर भागों का गिना हुआ समूह है जिसको स्केल की एकाई मान लेते हैं।

"एक मील पर चार इञ्च"—इस बात से यह मतलब है कि नक़शे का एक इञ्च एक मापी हुई भूमि के चार मील को बनाती है। इसे प्रायः यों लिखते हैं—४ मील = १ इञ्च॥

१२१—स्केल ३ प्रकार के होते हैं। मामूली भाग किए हुए स्केल डायगोनल (कर्ण) स्केल और वरनियर स्केल॥

१२२—दशक कर्ण स्केल—शकल ४९ से दशक कर्ण स्केल ज़ाहिर होता है॥

शकल ४९



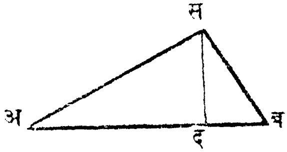
चिह्न ० और ३० के बीच का हिस्सा केवल भाग किया हुआ स्केल है जो ६ बराबर हिस्सों में बांटा गया है ॥

चिन्ह ० के बाएं ओर के समकोण आयत की कुल भुज १० बराबर हिस्सों में भाग की गई हैं और भाग के बिन्दु कर्ण रेखाओं से लम्बान की ओर अकर्ण रेखाओं से अर्ज़ की ओर मिलाए गए हैं। इस स्केल के द्वारा हम रेखाओं कि निस्बती लम्बाई दो स्थान दशमलव तक बता सकते हैं। पर ऐसे रेखा के निकालने में जो २०·६ से ज़ाहिर की जावे कम्पास (परकाल) की एक भुज को २० पर रखो और दूसरी को कर्णस्केल में ६ अंक तक बढ़ाओ ॥

उस रेखा के निकालने में जो १०·८६ से ज़ाहिर को जाय कम्पास की एक भुज को १० पर रखो और उसको उस बिन्दु तक हटाओ जो कि १० पर के लम्बान रेखा और ६ से जाते हुए अरज़ी रेखा के काट से पैदा होता है। तब इसको कर्ण रेखा ८ तक अर्ज़ की ओर बढ़ाओ तो इससे चाहा हुआ फ़ासला १०·८६ मालूम हो जायगा ॥

१२३—नदी की चौड़ाई नापना—

शकल ५०



मान लो कि अ द नदी की चौड़ाई है; दूसरे किनारे अ पर कोई निशान या चीज़ ठहरा लो, ब द रेखा को अ की सीध में खींचो, अपने सुभीते की लम्बाई से द स रेखा को अ ब के साथ समकोण बनाता हुआ नाप लो (युक्ति १४४,

दिशा स अ को मन में ठहरा लो और उसपर जरीब की मदद से (युक्ति ११३) स ब लंब खींचो । तब अ द= स द^{२} ÷ ब द (युक्ति ५४); परन्तु स द और द ब की लम्बाई मालूम है इसलिये अ द सहज में मालूम हो सकता है ॥

पहिले भाग का उत्तर

पहिला अभ्यास

(१) १६२५ वर्ग गज़ (२) ६५ वर्ग फ़ीट ९० वर्ग इञ्च (३) ९ वर्ग फ़ीट (४ १३ एकड़ १ रोड २३·९६ पोल निकट (५) १० एकड़ ३ रोड ३७·२८६४ पोल (६) ७८ एकड़ ३९·०१४४ पोल (७) १४६·९३३६ एकड़ (८) १० जरीब (९) ६१$\frac{५}{७}$ गज़ (१०) १०४० गज़ (११) ४१६१६ वर्ग इञ्च १३) ५४ फ़ीट (१४) ७२ इञ्च (१५) ३०$\frac{१}{४}$ वर्ग फ़ीट (१६) २$\frac{१}{४}$ वर्ग इञ्च (१७) ११४९ वर्ग फ़ीट (१८) २७ इञ्च (१९) २५ पोल और ५० पोल (२०) ४०७$\frac{१}{९}$ (२१) ४६१४ वर्ग गज़ (२२) ८८ गज़ (२३) ५१ एकड़ २ रोड २४ पोल १४ वर्ग गज़ (२४) ६३६ एकड़ (२५) १४७ ॥

दूसरा अभ्यास

(१) ४ फ़ीट ७′ ६″ (२) ७ फ़ीट २′ ९″ (३) ५ वर्गफ़ीट १०′ ११″ ६‴ (४) ९ वर्ग फ़ीट ३′ ०″ ३‴ (५) १११ वर्ग फ़ीट ०′ (६) ९३ वर्ग फ़ीट ११′ ०″ ४‴ (७) ३२ वर्ग फ़ीट ९′ ५″ ६‴ (८) ७ फ़ीट ८$\frac{१}{४}$ इञ्च (९) ५ वर्ग फ़ीट ५३$\frac{१}{६}$ वर्ग इञ्च (१०) ३०० वर्ग फ़ीट ६९$\frac{७}{१६}$ वर्ग इञ्च ॥

तीसरा अभ्यास

(१) ७ वर्ग फ़ीट १०′ ६″ (२) १५ वर्ग फ़ीट ९′ ११″ (३) ४८ वर्ग फ़ीट ४′ ११″ ११‴ ४⁗ (४) ८ वर्ग गज़ १ वर्ग फ़ीट २′ २″ (५) १७ वर्ग गज़ ५′ ९″ ६‴ ८⁗ ॥

चौथा अभ्यास

(१) ६९००रु० १३ आना ४ पा०; ८८३३$\frac{१}{१२}$; ११०४१ (२) २७७$\frac{१}{३३}$ गज़ (३) ३८७$\frac{१}{६}$ गज़ (४) १३९०० वर्ग फ़ीट (५) २५ जरीब (६ ३१६१० (७) ७$\frac{२३}{३३}$ (८) ३६ रु० १ आ० ९$\frac{३}{६}$ पा० (९) १९ रु० ११ आ० ४ पा०; और २१ रु० १४ आ० (१०) ४२$\frac{१}{२}$ गज़; ११२ रु० १४ आ० ३ पा० (११) १'५ इंच (१२) ९ एकड़ २ रोड २७'७१ पोल निकट (१३) १४२$\frac{१}{३}$ वर्ग फ़ीट (१४) ३६० वर्ग फ़ीट (१५) ९ गज़ (१६) चौड़ाई = २० फ़ीट, उंचाई = १६ फ़ीट (१७) ५० मिनट (१८) ९४३९४२४१० एकड़ २८'१५४२'५९६० बंगाल के बीघे (२०) लं० = २'१ फ़ीट, चौ० = १'१ फ़ीट, उं० = १२ फ़ीट ॥

पांचवां अभ्यास

(१) २०५ (२) ३'५३ (३) ११'५७ (४) ७२ (५) ६०९ (६) ४६४ (७) १२०५ (८) ८० (९) २२४४० (१०) ३३४६१ ॥

छठवां अभ्यास

(१) (१) ४१ इञ्च (२) १८ फ़ीट ५ इञ्च (३) ५८ फ़ीट १ इञ्च (४) ९९ फ़ीट १ इञ्च ॥

(२) (१) २ फ़ीट ९ इञ्च (२) २ फ़ीट ७ इञ्च (३) ९ गज़ ० फ़ीट ९ इञ्च (४) १५ गज़ १ फुट ७ इञ्च ॥

(३) म^{२} + न^{२} (४) १ एकड़ (५) ९१८७५० वर्ग फ़ीट (६) १२०$\sqrt{३}$ गज़ (७) ९'३४८ एकड़ (८) १११ मील (९) २० जरीब (१०) ९०, ४००, ४१० (११) ६० एकड़ (१२) २०० वर्ग गज़ (१३) ३५३'५१ गज़ (१४) ३४ फ़ीट (१५) ९$\frac{१}{४}$ गज़ (१६) (१) ७'०७१ फ़ीट (२) ११'४०१ फ़ीट (३) ३२ फ़ीट ९ इञ्च निकट (४) ५०'६०२ फ़ीट (१७) ६५ फ़ीट (१८) १२ फ़ीट (१९) २५ फ़ीट (२०) ४२'५ हाथ (२१) २ फ़ीट (२२) ७ फ़ीट (२३) ४३ फ़ीट (२४) ३१'५ गज़ और ८

गज़ (२५) ३२·६ फ़ीट और ८४·७ फ़ीट (२६) २६७ मील (२७) ३१३ गज़ (२८) १६२५ फ़ीट (२९) २०१६ वर्ग फ़ीट (३०) √५१ हाथ (३१) ७१ मील १ फरलांग (३२) ६ फ़ीट १ इञ्च (३३) १३·६९ वर्ग फ़ीट (३४) आधार = १२० फ़ीट, लम्ब = ११९ फ़ीट (३५) ३¾ हाथ (३६) १२ हाथ (३७) ५० हाथ (३९) भुजाएं ६·५, ६·५, ६·६ और ६·५, ६·५, ११·२ इञ्च हैं; क्षेत्रफल = १८·४८ वर्ग मीटर ॥

सातवां अभ्यास

(१) (१) २४ वर्ग फ़ीट (२) ११९६ वर्ग गज़ (३) ३०६०० वर्ग कड़ी (४) १७६० वर्ग गज़ (५) ११६०२५० वर्ग फ़ीट (६) ३७०६७५८०० वर्ग कड़ी ॥

(२) (१) ९·७९७ (२) १४२·९१२ (३) ९७१·६५८ (४) १८८६९·११२ ॥

उदाहरण २ (पृष्ठ ४६)

(१) न्यून कोण (२) अधिक कोण (३) अधिक कोण (४) समकोण (५) न्यून कोण।

आठवां अभ्यास

(१) १५६२५√३ वर्ग फ़ीट या २७०६३·२९३७५ वर्ग फ़ीट निकट (२) ३२७·७५ वर्ग फ़ीट (३) ७५००√१५ वर्ग जरीब या २९०४६ एकड़ निकट (४) ७३९२ वर्ग गज़ (५) १८४८ वर्ग फ़ीट (६) १२११ फ़ीट (७) १०२ एकड़ (८) १६√३ वर्ग गज़ (९) २३१०० रु० (१०) ६०० गज़ (११) १२०१२० वर्ग गज़ (१२) ५७७३ १/६ वर्ग फ़ीट निकट (१४) ७६२·४४२२६६८ वर्ग फ़ीट (१५) ५३३, ५३३, ६१६ (१६) २१ १/१३ फ़ीट (१७) ४ ११/१६ (१८) ७०२ फ़ीट निकट (१९) ४ पौंड (२०) २४० गज़ (२१) २८ ५/११ वर्ग पोल (२२) ५८३ निकट (२३) ७३ २/११ एकड़ (२४) १ वर्ग जरीब ७४३ ११/१५ वर्ग कड़ी (२५) १२ फ़ीट (२६) ९३९४५

वर्ग गज़ निकट (२७) ४०७ रु० ५ आना (२८) २९ गज़ (२९) १५·३९६ गज़ निकट (३०) ३४० गज़ (३१) ११८ $\frac{२९}{१२}$ एकड़ (३२) १३८२१·१४२८ वर्ग फ़ीट (३३) १७११२० वर्ग गज़ (३४) ७८, ८९, ८९ (३५) १२४५०·०८ वर्ग फ़ीट निकट (३६) ११४ गज़ (३७) (१) न्यून कोण (२) अधिक कोण (३) अधिक कोण (४) न्यून कोण (५) समकोण (६) न्यून कोण (३८) २१·०७ और ४०·७७ और ५७·५ (३९) ९९ और १५ (४०) ३९६ और १७३ $\frac{३}{७}$ और २१२ $\frac{४}{१७१}$ (४१) ११० वर्ग गज़ (४२) २५७४, ५२३८ $\frac{१}{९}$, ९६८ और ६८४४ $\frac{१}{९}$ ॥

नवां अभ्यास

(१) १३१२५ वर्ग गज़ (२) १९·३६४९ फ़ीट (३) ४४० फ़ीट (४) १६१०० वर्ग गज़ (५) २१४० वर्ग फ़ीट (६) ४३५ वर्ग फ़ीट (७) ३७५ वर्ग फीट (८) २३४ एकड़ १ रोड २० पोल (९) २५२० वर्ग फ़ीट और ५६ फ़ीट (१०) ३२·५ फ़ीट और १०३२·२४ वर्ग फ़ीट (११) ३८४ और ३२ (१२) ३५२ गज़ (१३) ९ $\frac{१}{२}$ गज़ (१४) ७७ गज़ (१५) १२४८ गज़ (१६) ६२ $\frac{१}{२}$ फ़ीट और ९३ $\frac{३}{४}$ फ़ीट ॥

दसवां अभ्यास

(१) ६८१२०० वर्ग कड़ी या ६ एकड़ ३ रोड ९·१२ पोल (२) ३४१६६६ रु० १० आना ८ पाई (३) ४१ $\frac{२}{३}$ (४) १९८ वर्ग गज़ (५) ७८ $\frac{१}{८}$ (६) २७ फ़ीट और २३ फ़ीट (७) ११४ $\frac{२}{९७}$ गज़ (८) २१६ (९) ८० कड़ी (१०) ७ फ़ीट (११) ४८०१३ वर्ग फ़ीट (१२) ४९४७० वर्ग गज़ (१३) ५४० वर्ग फ़ीट (१४) ४०८०० वर्ग फ़ीट (१५) ९१७५० वर्ग गज़ (१६) ८ $\frac{१}{४}$ और ८ $\frac{३}{४}$ और ९ $\frac{१}{४}$ और ९ $\frac{३}{४}$ वर्ग मीटर।

ग्यारहवां अभ्यास

(१) ३५५२०००० वर्ग गज़ (२) १६८७·५ वर्ग गज़ (३) १२८००० वर्ग गज़ और ४२२४० वर्ग गज़ (४) ६६० गज़ (५) १०·१२५ जरीब

(६) ७२० वर्ग गज़ (७) १२८$\frac{१}{४}$ वर्ग गज़ (८) १२६०० वर्ग गज़ (९) ६२५० वर्ग फ़ीट (१०) २१६२२ (११) १६११३८ वर्ग फ़ीट (१२) ३·२५ वर्ग जरीब (१३) ९·५४ (१४ ३·०४६ वर्ग गज़ (१५) ३९८४$\frac{१}{२}$ वर्ग फ़ीट और ५३०४ $\frac{१}{२}$ वर्ग फ़ीट ॥

बारहवां अभ्यास

(१) ५१२·८ एकड़ (२) २६००·५ वर्ग जरीब (३) ४८९० वर्ग फ़ीट और ३७ फ़ीट (४) २८८४० वर्ग गज़ (५) ४१०८ वर्ग फ़ीट (६) ४११०·५ वर्ग फ़ीट (७) १३८४८ वर्ग गज़ (८) १२६११५·५ वर्ग फ़ीट (९) ५८४४१·५ वर्ग कड़ी (१०) १२६६०००० (११) १०४४·५ वर्ग फ़ीट (१२) ५८७ वर्ग फ़ीट ॥

तेरहवां अभ्यास

(१) (१) ६०° (२) ९०° (३) १०८° (४) १२०° (५) १२८°$\frac{४}{७}$ (६) १३५° (७) १४०° (८) १४४° (९) १४७°$\frac{३}{११}$ (१०) १५०° (११) १५६° (१२) १६२°

(२) (१ २७′ (२) ६′ ४·१″ (३) १°४८′ ४) ३०° ३०′ ३६″ (५) ३२″ ·४

(३) (१) ·४७२ (२) ·०४४५ (३) ·४९२

(६) १६ (७) ३०° (८) १५०°२१′ ४३″ (९) १७६°२४′ (१०) ४६°२२′ २″·५ (११) ७२°२४′ ६″ (१३) ३७° २२′ और ५२° ३८′ (१४) ६०°

चौदहवां अभ्यास

(१) १६४०६$\frac{१}{४}$ वर्ग फ़ीट (२) १५२५० $\sqrt{३}$ वर्ग फ़ीट (३) १७४ $\sqrt{३}$ वर्ग जरीब (४) ३० एकड़ (५) १४४३·३७५६ वर्ग फ़ीट (६) $\frac{१}{२}\sqrt{१७·१३}$ फ़ीट और १६ $\sqrt{२}$ फ़ीट (७) $\frac{११७५ \sqrt{२}}{४}$ वर्ग फ़ीट

(८) ४९०६$\frac{१}{४}$ वर्ग फ़ीट (११) २५० $\sqrt{३}$ (१२) १२८ $\sqrt{३}$ वर्ग गज़ (१३) १२१५·६२५ वर्ग जरीब (१४) ५० फ़ीट (१५) २२३२ वर्ग फ़ीट

(१६) ४१ २३१०'७६ फ़ीट (१७) १३१८० वर्ग फ़ीट और १८४ १७ फ़ीट निकट (१८) ११२० वर्ग गज़ (१९) १४ ५/६ फ़ीट (२०) १३२ ८ फ़ीट निकट

मिश्रित उदाहरण

(१) ९७०३० वर्ग गज़ (२) ८० मील (३) ६५० वर्ग फ़ीट (४) २०० फ़ीट (५) १२० वर्ग गज़ (६) १४० ५/६ (७) १७६० (८) ३००० वर्ग फ़ीट (९) १२ रु० ५ आना ११ पाई (१०) ४६१ फ़ीट (११) ४५'५ (१२) ३६४७२ वर्ग गज़ (१३) २० √१० गज़ लम्बा और ५ √१० गज़ चौड़ा और १० √१० गज़ ऊँचा; ५६२ रु० ८ आना (१४) ८६६२५० वर्ग फ़ीट (१५) ३६ रु० ४ आना ९ ३/५ पाई (१६) ५१४९७६ (१७ ६६११२ (१८) ६७ १/२ फ़ीट (१९) ६० √६ √३ फ़ीट (२०) १३ [illegible] (२१) २९६ फ़ीट (२२) २६ √६ (२३) २५०० वर्ग फ़ीट (२४) २० (२५) '०४'५३ वर्ग मील निकट (२६) ६ २/३ एकड़ और ३ २/३ एकड़ (२७) १३'५० वर्ग फ़ीट; ३७ १/२ फ़ीट; ३६ फ़ीट (२८) ३१'५ [illegible] गज़ (२९) २४०० और २६०० और ३२०० और १८०० वर्ग फ़ीट (३०) ९०'५७'६ (३१) १३ ५/६ मिनट (३२) १०'२४ फ़ीट; ६२५ फ़ीट; '५६६ [illegible] फ़ीट (३३) ४४ वर्ग फ़ीट ७' ११" ८''' १०'''' (३४) १०७'१ वर्ग गज़ (३५) १६ पौं० ३ शि० ६ ३/५ पेन्स (३६) ७ [illegible] एकड़ और २६९ गज़ १ फ़ुट ४ इञ्च (३७) २५ फ़ीट और १० फ़ीट और २० फ़ीट (३८) २७६'१२५ वर्ग फ़ीट (३९) ३१ और २१ और १३ (४०) २६ [illegible] वर्ग फ़ीट (४१) १२००० गज़ (४२) १९२ [illegible] (४३) १२६३७ और १२०१२ (४४) १२ रु० १४ आ० ८ पाई (४५) १४'६२ एकड़ निकट (४६) ३६ [illegible] वर्ग गज़ (४७) ८१'५०८५ वर्ग फ़ीट (४८) ३३ चक्कर (४९) ४ पौं० (५०) २६ १/७ गज़; ९ रु० १२ आ० ८ पा० (५१) १८'५९'७८५ गज़ (५२) २०० (√७ + १) और २०० (√७ – १) फ़ीट (५३) १४३० वर्ग फ़ीट (५४) ५'१० √५ वर्ग फ़ीट (५५) २ पौं०

१५ शि० (५६) ६३३०० वर्ग कड़ी निकट (५७) ३८४ वर्ग फ़ीट (५८) २०√३ फ़ीट और ३००√३ वर्ग फ़ीट (५९) ८ : १३ निकट (६०) १२१८ पौं० १९ शि० ३$\frac{१}{२}$ पेन्स (६१) भुज = ३$\frac{१}{३}$ (६२) १८√१५ फ़ीट और १६२√१५ वर्ग फ़ीट (६३) १८·४३९ गज़ (६४) ४८६ (६५) ६६·९९८० फ़ीट निकट (६६) ५००० (६७) २६·८८३ एकड़ निकट (६८) २२४० (६९) १ रो० २६$\frac{२}{३}$ पो० (७१) २५४१√१५ वर्ग फ़ीट (७२) २८० वर्ग फ़ीट (७३) १२८९ फ़ीट निकट (७४) १२ एकड़ २ रोड ३९·४ पो० (७५) ३३ पौ० (७६) ४९२२७ पौ० ५ शि० ५$\frac{५}{९९}$ पेन्स (७७) १ फ़ुट और २ फ़ीट (७८) २०२·३७ गज़ निकट (७९) १० पौ० ४ शि० ९ पेन्स (८०) २७० और १५० वर्ग फ़ीट (८१) २५ फ़ीट (८२) ५$\frac{१}{२}$ गज़ (८३) ३४ शि० (८४) ९६ फ़ीट (८५) ९६ (८६) ५२८ गज़ (८७) १२·५ फ़ीट (८८) ३१५ एकड़ और ७८$\frac{३}{४}$ एकड़; २३६$\frac{१}{४}$ एकड़ (८९) २४; ३६; १६ फ़ीट (९०) २१० और २९४ वर्ग फ़ीट (९१) ७५$\frac{३}{३३}$ गज़ (९२) २० फ़ीट (९३) ३१८२८ वर्ग फ़ीट (९४) ७ एकड़ ३ रोड़ ७·८४४९१२ पो० (९५) ३५३·२६८ वर्ग फ़ीट (९६) १० फ़ीट (९७) ४·५√३ वर्ग फ़ीट (९८) २३४२·७५ वर्ग गज़ (९९) १२५०√३ वर्ग फ़ीट (१००) ३० गज़ (१०१) १४१८५ वर्ग फ़ीट (१०२) ८० फ़ीट और ५४$\frac{१}{२}$ फ़ीट निकट (१०३) १०८७$\frac{१}{२}$ वर्ग फ़ीट (१०४) १७३२ फ़ीट; १०√२१ फ़ीट और १०√६१ फ़ीट (१०५) ४२ फ़ीट ७ इञ्च निकट (१०६) २५·२२ (१०७) ११·५१५१७; ३८५·४८४८३ (१०८) ८०६·२२५७७ कड़ी (११०) ३$\frac{३}{७}$′ और ४$\frac{४}{७}$′ (१११) १·७३२ मील; १$\frac{१}{२}$ मील (११२) ३०√३ फ़ीट (११३) ३·३५ एकड़ (११४) १८७२; ७४·८८; ७८ और ४६·८ (११५) १·३६६०२५४ ....मील (११६) २२७·३५ वर्ग फ़ीट (११७) ४१७५ वर्ग गज़ और ६५ गज़ (११८) १५ फ़ीट और ५४ वर्ग फ़ीट (११९) २० भुज

का क्षेत्र (१२०) ३ एकड़ २ रोड़ १४·६०२१५५ पो० (१२१) २०० फ़ीट और $\frac{१९८२५}{४१३६३२}$ एकड़ (१२२) १५२·८ फ़ीट निकट (१२३) २३·८ (१२४) १२·२८ और १०·२९५६

दूसरे भाग का उत्तर

पन्द्रहवां अभ्यास

(२) ३ (३) २९ फ़ीट
(४) १८७ इञ्च (५) ३३·८ फ़ीट
(६) ५४·२७ फ़ीट लगभग
(७) २५ फ़ीट (८) १८·८९३६१ मील
(९) १० फ़ीट और ·१० फ़ीट
(१०) १० फ़ीट
(१२) १२·८४५२३२६ मील
(१३) ५० फ़ीट (१४) ३६ फ़ीट
(१५) २६६६६$\frac{२}{३}$ फ़ीट
(१७) ५·४२७२०३४ फ़ीट और ३·३१६६२४८ फ़ीट
(१८) ५४·१८७५
(१९) ८० फ़ीट, ४६·१८८ फ़ीट और ९२·३७१ फ़ीट
(२०) ६१ फ़ीट और ३३८·२७ फ़ीट
(२१) १३२·२८७५६५ फ़ीट ; १७३·२०५०८ फ़ीट ; १९३·६४९१६५ फ़ीट; २०० फ़ीट , १९३·६४९१६५ फ़ीट ; १७३·२०५०८ फ़ीट और १३२·२८७५६५ फ़ीट

सोलहवां अभ्यास

(१) अ = ८$\frac{१}{८}$ फ़ीट; ४६$\frac{१}{६४}$ गज़ ; २८८$\frac{१}{६४०}$ कड़ी;
१३८$\frac{१}{८}$ फ़ीट; १९६२$\frac{१}{६}$ फ़ीट ; ११७१२५ कड़ी ;

$\frac{३५\sqrt{६}}{२४}$; $\frac{६१२५\sqrt{५१०६}}{२०४२४}$; $\frac{५८६८५}{१२\sqrt{२९१४}}$ और

$\frac{५७५७५}{८\sqrt{१२२१}}$

र′ = १$\frac{१}{२}$ फ़ीट ; १२ गज़; ५६$\frac{१}{४}$ कड़ी ; ४९$\frac{१}{२}$ फ़ीट ;

३५० फ़ीट ; १९३० कड़ी; $\frac{१}{२}\sqrt{६}$; २ $\sqrt{\left(\frac{१३८}{३७}\right)}$

९ $\sqrt{\frac{४७}{६२}}$ और $\frac{३}{४}\sqrt{१२१}$

$र_{अ}$ = २ फ़ीट ; २०$\frac{२}{३}$ गज़; २२६$\frac{२}{३}$ कड़ी ; ३·१२ फ़ीट ;

६६३० फ़ीट; १९८० कड़ी; $\sqrt{६}$; २ $\sqrt{\left(\frac{२२२}{२३}\right)}$

९ $\sqrt{\frac{६२}{४७}}$ और $\frac{४६}{२६}\sqrt{१२२१}$

$र_{ब}$ = ८फ़ोट ३६ गज़ ८१$\frac{३}{५}$ कड़ी; ९० फ़ीट ;

५१५ फ़ीट ; ९६०३० कड़ी ; $\frac{४}{३}\sqrt{६}$; $\sqrt{\frac{८५१}{६}}$;

$\frac{२\sqrt{२९१४}}{३}$ और ५४० $\sqrt{\frac{११}{५५}}$

$र_{स}$ = २४ फ़ीट; १३९$\frac{१}{२}$ गज़; ९०० कड़ी; १६० फ़ीट ;

९७५ फ़ीट; ३७४४२० कड़ी; ४ $\sqrt{६}$; $\sqrt{५१०६}$; ६ $\sqrt{२९१४}$

और १८ $\sqrt{१२२१}$

(२) २५० फ़ीट (३) २४ वर्ग फ़ीट; १० फ़ीट; २ फ़ीट (४) ५७·७३५ फ़ीट (५) २९.३ (६) ४ (७) ८·९४४२७२

सत्रहवां अभ्यास

(१) १·७३२ गज़ (२) ८·४८५२६ फ़ीट (३) भुज = ऊपरीगत वृत्त का व्यासार्ध = १२·४०८ लगभग । अंतर्गत वृत्त का व्यासार्ध = १०·७४५ लगभग (६) २३३८·२६८५८ वर्ग फ़ीट (७) ६४·९५१९ वर्ग इञ्च (८) ४·६८२१६ फ़ीट लगभग

(९) ५०६·२५ वर्ग इञ्च (१०) ४०·५ वर्ग फ़ीट (११) ९३·५२०७४३२ वर्ग फ़ीट (१२) १८० फ़ीट

अठारहवां अभ्यास

(१)—(१) ६२८·३१८ फ़ीट (२) ६४·५५७३२ फ़ीट (३) ६·२८३१८ मील

(२) ५०४१० चक्र (३) ९१ गज़ (४) ६७१६१ मील निकट (५) १०४७·१२७५५११२६५२७७४६१५४२१४४६१०९३१६७६२८ मील फ़ी घंटा (६) ११·२५ मील (७) २४० पेड़ (८) ३३० गज़ (९) ३५ गज़ (१०) ३·१८३०९ फ़ीट (११) १०·५ गज़ (१२) ७०·७१ फ़ीट (१३) ३१४·१५९ इञ्च (१४) २८३०·५७२५९ (१५) १०० गज़ (१६) २·१ फ़ीट लगभग (१७) १४·६२१ इञ्च (१८) १५·९१५४ इञ्च (१९) २२·५०७ फ़ीट (२०) ३१२·५ मील (२१) २८ फ़ीट लगभग (२२) ३८५ रुपया (२३) ८४ : ५ (२४) २१८·७५ गज़ निकट (२५) २१५६० फ़ीट ॥

उन्नीसवां अभ्यास

(१) ६५ एकड़ ३ रोड २ पोल निकट (२) ५०८९·—) निकट (४) ७·९८ फ़ीट निकट (५) १ ; √२ या १·४१४२१३६ ; √३ या १·७३२०५०८ ; और २ इञ्च निकट (६) १०$\frac{२}{७}$ वर्ग फ़ीट निकट (७) २८:३ (८) २८·५४ (९) ६३·८२ वर्ग जरीब (१०) ६६७२१·९५१ वर्ग फ़ीट (१२) २१·४६ वर्ग इञ्च (१३) ·०६ वर्ग इञ्च लगभग (१४) (१) ५६२५०० वर्ग फ़ीट (२) ६४९५१९·०५ वर्ग फ़ीट निकट (३) ७१६१९७·२३ वर्ग फ़ीट (१५) $\frac{म^{२}(४-\pi)}{४}$

(१६) ६० (१७) ९ वर्ग फ़ीट ९० वर्ग इञ्च लगभग (१८) ११९५९६८·७५५५१ वर्ग फ़ीट या २७·४५५६६४७ एकड़; ३८७६·७२-२०६ फ़ीट (१९) ३१४१५·९२६५३६ वर्ग फ़ीट (२०) २५५·१५ वर्ग इञ्च (२१) ३१·८३०९ वर्ग फ़ीट (२२) ३०५१३६३·५२ वर्ग फ़ीट

(२३) २ पौंड ५ शिलिङ्ग लगभग (२४) ९१७३·४४२८ गज़; ९३३४००·७७६ वर्ग इञ्च (२५) ८९·१ और ३·३ वर्ग इञ्च (२६) २११४·१५९ वर्ग फ़ीट और २०९२·४७७ और जब जरीब बढ़ती है तो क्षेत्रफल २०९२·४७७ वर्ग फ़ीट बढ़ जाता है ॥

मिश्रित उदाहरण

(१) ५१·०५ गज़ (२) ५∨१० फ़ीट (३) १८५ फ़ीट (४) ५ मील अनक़रीब (५) २५$\frac{११}{१२}$; २४; २२$\frac{२}{९}$ गज़ (६) १२ फ़ीट; ८ फ़ीट; १४·४२२२०५ फ़ीट (७) २१ वर्ग फ़ीट और १८·४१६ वर्ग फ़ीट (८) उंचाई = ३·६४१; ५·२५९; ७·८८८; मिडियन = ४·०३१; ९·०६९; १०·७७०३; अ = ७·४१६२२८६ (१०) १२० (१२) ५११·९६४८ वर्ग फ़ीट (१३) १$\frac{१}{२}$ (१४) २०४·१२४१५ फ़ीट (१५) २६·४ (१६) ४ : ३∨ ३ : ६ (१७) ४∨३ गज़ (१८) ४९ और १६८ फ़ीट (१९) ११२$\frac{१}{२}$ फ़ीट (२०) ३$\frac{४}{१५}$ फ़ीट और ३९ फ़ीट (२१) १८० और ३६०∨५ (२२) ४०∨३ और ४० फ़ीट (२३) १३ (२४) ५२$\frac{१}{४०}\frac{१}{२}$ फ़ीट (२५) १४; ९३६ (२६) ७५·३९८१६ गज़ सब से छोटा और सब से बड़ा फ़ासिला भुज ९७ के सम्मुख के शीर्ष से क्रम से २·४२ और २६·४२ गज़ है (२७) १२ एकड़ ११·३७०८४ पर्च (२८) ७५$\frac{३}{७}$ फ़ीट (२९) १५०∨६ गज़ (३०) २६४० फ़ीट (३१) १४८·०१४५ और २४·३२१५ (३२) ८६·६०२५ मील (३३) २० वर्ग इञ्च; ४·४३ इञ्च और १२·५ इञ्च (३४) १·५८११३८८; ३·३९११६५ और २·७८३८८२ (३५) (१) म न (म^{२}—न^{२}) (२) प क अ श (क अ + प श) (प अ−क श) (३) २ अ (अ + २) (२ अ−१) (३६) २००, १००∨३ (३७) △ = १९२०६३३० ; अ = १८१५ ; अ = ४३८३·५ (३८) ३०°; ९०°; ६०° (३९) ७८० (४०) (१० + ३∨५) ; (१०−३∨५) (४१) ७४·८८; ४८; ४६·८ (४२) १६१·५ (४३) १५·१३०६८०७ (४४) १०० फ़ीट निकट (४५) $\frac{१}{४}$∨२१ (४६) १४४०० : १४१६१ (४७) ३१२० (४८) ११४० (४९) ६४; ४४ (५०) २·६४ (५१) ६·०२०७९७३;

७ ; ७·७६२०८७३ (५२) ३७२० (५३) ११२·२ (५४) ३ : २ ; ९: ४ (५५) २$\sqrt{३०}$ (५६) ८४ (५७) १२४ (५८) ८·७७ फ़ीट लगभग (५९) ७८·२२९४६ मील (६०) २०४८७१८·७५ (६१) २१·९५३; १४·४९; ८·७७ निकट (६२) अ = ·४३७५; अ = १·२००६२५ (६३) ४९·०२५ (६४) १६२·५; ८७·३६ (६५) ४·१ ; ·९ (६८) १०२·५ (६९) ८००० मील निकट (७०) २६६$\frac{२}{३}$ फ़ीट (७१) ७८·४१ (७२) २१०·२२ (७३) $\frac{३२}{५८}\sqrt{१५}$, $\frac{१६}{५६}\sqrt{१५}$; $\frac{६}{५}\sqrt{१५}$ (७४) अ = ४०·६२५ (७५) १६·२५ (७६) ८ और ६ (७७) १८९ वर्ग फ़ीट (७८) १ : ४ (७९) २·५ (८०) ६ ; २·५ (८१) २० मीटर (८२) २·८ इञ्च (८३) १८$\frac{६}{५३}$ फ़ीट (८४) ४२० ; ७ ; ३२·५ (८५) १ : ४ (८६) ४८ गज़ (८७) १८९६ वर्ग फ़ीट (८८) ४६·२७११ वर्ग फ़ीट (८९) १३५° (९०) ६ (९२) १५ ; २० ; २५ (९३) ९ ; २०$\frac{५}{६}$ (९४) २७९०·७५ वर्ग इञ्च (९५) १५ (९६) २४ (९७) देखो युक्ति ७७ (९८) २९·७५ (९९) १४·६२५ (१००) २२१ $\frac{३३}{५६}$ (१०१) २२१ (१०२) १५६ (१०३) २२ (१०४) १५०° (१०५) ११२ (१०६) ७$\frac{३}{८}$; ४$\frac{७}{८}$; ३$\frac{१}{८}$ (१०७) ९·४३३९८११ ; १७·८८८५४४; ८४·३८००९२४ (१०८) ३००$\sqrt{३}$ (१०९) ३·२ ; १·८ (११०) २२१; ७८$\frac{६}{५३}$ (१११) ४५५४८८·५६१७८३६८४ (११२) २१·८७६९२; ५२·५०४ ९·११५५ (११३) ७$\frac{१}{६}\frac{३}{८}\frac{१}{३}$ पर्चे (११६) ३१०५८·२८ वर्ग फ़ीट (११७) १९८५५·६३४१९ वर्ग इञ्च (११८) २५ फ़ीट (११९) ४७·१२३८५ फ़ीट (१२०) २१०० वर्ग फ़ीट (१२१) १३४ मील निकट (१२२) १०$\sqrt{३}$; ५ (१२३) २८९$\frac{३१}{३१}$; ४२००० (१२४) ७१४·१५१२६५३६ वर्ग फ़ीट (१२५) ८ फ़ीट (१२६) २४१।=)९ निकट (१२७) ५१२($\sqrt{२}$—१) या २१२·०७७३६३२ वर्ग फ़ीट (१२८) $\sqrt[४]{२७}$: २ (१२९) ४ इञ्च (१३०) ६९·५३ वर्ग इंच (१३१) ३६° ; ७२° ; ७२° (१३२) ८० गज़ (१३३) १८७५ वर्ग फ़ीट (१३४) ६२$\frac{५}{७}$ फ़ीट; ९.४$\frac{२}{७}$ फ़ीट (१३५) २६ फ़ीट (१३६) ८१ ; १६४० (१३७) १ फ़ीट और ७ फ़ीट (१३८) $\frac{१}{८}\frac{३}{८}\frac{५}{८}\frac{७}{८}$ (१३९) ४२·५ इञ्च (१४०) ८८५$\frac{१}{३}$ वर्ग

फ़ीट (१४१) ६६ १/३ फ़ीट (१४२) ३०; ४० (१४३) ३७५० √३ वर्ग फ़ीट; ५००० √३ वर्ग फ़ीट (१४४) ३ वर्ग फ़ीट (१४५); ७५; १८०; १९५ (१४७) ३१४·१५९२६५३६ वर्ग फ़ीट (१४८) ४ (३ √२ – २ √३) फ़ीट (१४९) ७॥। =) लगभग (१५०) ७५० वर्ग गज़ (१५१) ४ फ़ीट; २ फ़ीट; ६ √३ वर्ग फ़ीट (१५२) ८२८४·२७२ वर्ग फ़ीट (१५३) १५ फ़ीट अनक़रीब (१५४) ६३८·५९ वर्ग फ़ीट (१५५) (६०७५ √३)/४ वर्ग फ़ीट; ६०७५ √३ वर्ग फ़ीट (१५७) ११ १/६, १२, १२ १/३ लंब हैं; ११·२३, १२·१६, १२·९७१ मिडियन हैं (१५८) ७२,५७७ वर्ग गज़ निकट (१५९) ·१८७५ वर्ग फ़ीट (१६०) ८०·७५ (१६१) १६ फ़ीट २ इञ्च (१६४) १२१ और ४० फ़ीट (१६५) ४२५ (१६६) ·७२५; १·०७५ (१६७) अर्धक = ८·०६ फ़ीट; भुज = ८·८६ फ़ीट; १०·०६ फ़ीट (१६८) ८ १/६ (१६९) ·१६४ (१७०) १२·४०९; २०·९५; १६·९१ (१७१) ४८; ९३६ (१७२) ९; ४०; ४१ (१७३) ५३।) निकट; ६००) (१७४) १११३; १६२५ (१७५) १९१ एकड़ १ रोड (१७६) ३१·२५; २५·७८७; १९·१८ (१७७) ४·१२३१; ७·६१५; ८·०६२; ३·१६२ (१७८) ४००(√२–१) या १६५·६८५४४ (१७९) ६८·८ एकड़ लगभग (१८०) ३ १/३ फ़ीट (१८१) ३३३ रुपया (१८२) क्षेत्रफल = ३२·८३ २ वर्ग फ़ीट; भुज = १०·९४ फ़ीट; ९·१२ फ़ीट; ७·२९६ फ़ीट अनक़रीब (१८५) ७·०७१ फ़ीट (१८७) ४·७ इञ्च (१८८) १२; ४० (१८९) २०५ फ़ीट (१९०) एक वृत्त जिसका क्षेत्रफल = २४६४९९·१७५ वर्ग गज़ लगभग ॥

तीसरे भाग का उत्तर

बीसवां अभ्यास

(१) (1) १ रोड १०·८८ पर्च (२) ३०·६८ पर्च
(३) १ रो० २१·७६ पर्च (४) १ रो० ६·८६ पर्च

(५) (२) रो० ८·३२ पर्च (६) २ ए० २ रो० ३० पर्च लग भग

(७) ९५३ वर्ग कड़ी (८) ९९२ वर्ग कड़ी

(९) २२५ वर्ग कड़ी

(२) (१) क्षेत्रफल = १ एकड़ ३ रोड २४ पर्च लगभग; स द = ४७१ कड़ी लगभग; लंब = ४०१ कड़ी लगभग; (२) स द, = ९०१; लंब = ७८०; क्षेत्रफल = ९ एकड़ १ रोड ३६·४८८ पर्च लगभग।

(३) (१) ५ एकड़ १ रोड ९·६ पर्च (कुछ क्षेत्रफल निकाल दिया गया है) (२) ९९८४० वर्ग कड़ी (३) २ रोड १४·८८ पर्च (४) २९ एकड़ २८·८ पर्च निकट

(६) (१) २ एकड़ ६·२५६ पर्च लगभग (२) १ एकड़ ३ रोड १५·२ पर्च लगभग

(७) ४५$\frac{3}{5}$ एकड़; १७४० कड़ी

(८) ४ एकड़ २६ पर्च निकट

(९) (१) ४९९५८ वर्ग कड़ी (२) १७४०५७ वर्ग कड़ी

(१०) ६ एकड़